Precálculo, un enfoque visual

Ricardo Cantoral • Gisela Montiel

ALWAYS LEARNING

PEARSON

PRECÁLCULO,

UN ENFOQUE VISUAL

PRECÁLCULO,
UN ENFOQUE VISUAL

Ricardo Arnoldo Cantoral Uriza
Gisela Montiel Espinosa

PEARSON

Datos de catalogación bibliográfica

Cantoral, Ricardo y Montiel, Gisela
Precálculo, un enfoque visual
Primera edición

PEARSON EDUCACIÓN, México, 2014

ISBN: 978-607-32-2330-0
Área: Cálculo

Formato: 20 × 25.5 cm Páginas: 200

Editora: Áurea Camacho Anguiano
aurea.camacho@pearson.com
Editora de desarrollo: Claudia Romero Mercado
Supervisor de producción: Juan José García

PRIMERA EDICIÓN, 2014

ISBN: 978-607-32-2330-0
ISBN E-BOOK: 978-607-32-2331-7
ISBN E-CHAPTER: 978-607-32-2332-4

Impreso en México. Printed in Mexico.
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – 16 15 14 13

PEARSON

www.pearsonenespañol.com

CONTENIDO

PRESENTACIÓN

La escuela es un sitio privilegiado para la diversidad, ya sea de opiniones, de tendencias, de criterios o de creencias. Una de estas últimas, que consideramos ampliamente difundida entre alumnos y maestros, señala que existe una relación unidireccional entre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Se asume que los conocimientos se transfieren sólo desde la enseñanza hacia el aprendizaje, es decir, que el alumno "graba" lo que se le comunica por medio de la enseñanza, con algunas pérdidas de información. Quizá por ello aún predomina en las aulas de matemáticas una enseñanza retórica y reiterativa. Sin embargo, hoy en día se ha mostrado, mediante investigaciones en matemática educativa, la fragilidad de este punto de vista, pues se ha puesto en evidencia que los alumnos construyen conocimiento con cierta independencia del discurso de la enseñanza; aunque a veces son inadecuadas e inclusive erróneas, construyen explicaciones que a su vez descubren profundas relaciones entre piezas del saber matemático, sin que eso haya sido parte explícita de su enseñanza.

Consideramos que estos conocimientos son el fruto de la interacción con su entorno, con sus compañeros, con sus historias de vida o con su ambiente académico y cultural, entre otros. De modo que la experiencia nos muestra que el conocimiento matemático de los estudiantes no es el resultado exclusivo de la atenta escucha que tengan para con la cátedra de su profesor.

Nuestra propuesta ha mostrado un cambio en los paradigmas de la enseñanza, al pasar del excesivo tratamiento algebraico de las funciones hacia otro en el que la visualización juega un papel más relevante en la formación de conceptos y procesos matemáticos. De este modo, trataremos la visualización en matemáticas y más particularmente, el análisis de las funciones algebraicas a través de su representación gráfica. En este sentido, este libro presenta una serie de diseños educativos, secuencias didácticas con las que pretendemos que los profesores y sus alumnos, profundicen su propio proceso de comprensión y entendimiento de los conceptos y procesos matemáticos relativos a las funciones algebraicas. Creemos que esta propuesta contribuirá a desarrollar entre los profesores sus propias prácticas de enseñanza utilizando las ideas de visualización. El diseño de estas secuencias se realizó con base en el análisis de carácter múltiple que ha sido desarrollado a lo largo de los últimos veinticinco años en el grupo de investigación del Área de Educación Superior del Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Una tesis teórica que ha orientado la labor de nuestro grupo de investigación consiste en considerar que la matemática se ha constituido socialmente, en ámbitos no escolares y, en consecuencia, su introducción al sistema de enseñanza obliga a una serie de modificaciones que

afectan directamente su estructura y su funcionamiento; de esta manera, se afectan también las relaciones que se establecen entre los estudiantes y su profesor. Este proceso de incorporación de los saberes al sistema didáctico plantea una serie de problemas teóricos y prácticos no triviales que, para su estudio, precisan de acercamientos metodológicos y teóricos adecuados. El desarrollo de tales aproximaciones se lleva a cabo mediante estudios que permiten entender los mecanismos de adaptación del saber a las prácticas de profesores y estudiantes. Como hemos dicho, nos interesa esclarecer las condiciones del aprendizaje de ideas complejas.

Por lo tanto, en este libro se propone una forma de tratamiento escolar de las funciones con base en resultados de la investigación contemporánea, que permiten augurar efectos positivos en los procesos de aprendizaje de los estudiantes.

Objetivos del libro

Objetivo general de aprendizaje

Profundizar y compartir el conocimiento sobre visualización de las funciones reales de variable real, para favorecer el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes, así como ayudar a los profesores en la toma de decisiones relativas a la elaboración y análisis de actividades de aprendizaje en el campo de la matemática escolar para ser utilizado en clase.

Objetivos específicos de aprendizaje

- Valorar los usos de la visualización de las funciones en matemáticas.
- Apreciar el aporte educativo que plantean las distintas alternativas de tratamiento de la graficación en la matemática escolar.
- Enriquecer la variedad de enfoques educativos que se derivan de atender la visualización de las funciones.
- Diseñar situaciones de enseñanza apoyados en la aproximación teórica del desarrollo del pensamiento matemático.
- Reflexionar sobre la propia práctica de enseñanza.

La obra tiene una orientación novedosa, se centra en la graficación como una forma particular de visualizar procedimientos, conceptos e ideas matemáticas, es decir, la visualización entendida como un proceso del pensamiento matemático.

Cada vez que se usa una estrategia de graficación, ya sea para construir, para interpretar o para transformar una forma gráfica, estamos al mismo tiempo desarrollando en el lector una mane-

ra particular de pensamiento matemático. Por ejemplo, al discutir el efecto sobre la gráfica de un factor $(x - a)^2$, se desarrolla una noción relativa a la forma de contacto entre curvas suaves.

De modo que los ejemplos, los ejercicios y los argumentos que se proponen, son también medios para ser usados en cualquier clase de matemáticas. Cada capítulo tiene una intención específica y el conjunto de ellos también.

El Capítulo 2 está destinado a brindar una visión panorámica del tratamiento de las funciones desde la perspectiva de la visualización. En él se ha incluido una serie de métodos para tratar con las funciones a un nivel introductorio, cada uno de ellos, de alguna manera, se verá reforzado en el cuerpo del texto. Nos interesa que con la lectura de este libro, particularmente de este capítulo, se pueda desarrollar la idea de que la noción de función no es solamente la gráfica, ni la tabla, ni la fórmula, ni la descripción verbal, sino por el contrario, que la noción de función evoluciona en la historia de la humanidad y en la mente de quienes la usan y la estudian. Para nosotros, la noción de función será desarrollada desde todos esos enfoques, buscando usarla de diferentes maneras y sobre todo, *resignificándola* progresivamente. De modo que este segundo capítulo, ofrece una introducción a la noción de función desde una múltiple perspectiva.

En cada capítulo se busca proponer una forma de análisis de las funciones mediante el empleo de un método particular de graficación, que a su vez se apoya en una estrategia para el desarrollo del pensamiento matemático. El Capítulo 4, por ejemplo, se ocupa del método de las transformaciones, con lo que se busca ayudar a construir un universo de formas gráficas en la mente de los lectores. Las formas gráficas no son sólo el resultado de las técnicas específicas de graficación, sino que son verdaderas entidades conceptuales que permiten analizar e intervenir en múltiples tareas matemáticas, de modo que las formas gráficas adquieran un significado propio. Dicho significado debe ser desarrollado por los estudiantes en su tarea escolar. Por eso, el Capítulo 3, aborda a la gráfica a través de sus puntos. En este capítulo se espera que se vaya haciendo de la gráfica un objeto numérico –es decir, un objeto sobre el cual es posible desarrollar el sentido de la proporción de la forma gráfica–, además de fortalecer una orientación espacial en el plano cartesiano. Nociones como *más grande que...* o *menor que...*, entre los números, adquieren un sentido visual interesante, como por ejemplo *encima de...* o *por debajo de...* Este capítulo inicia con un tratamiento de las formas gráficas que va y viene de las tablas numéricas.

En los Capítulos 5 y 6 nos ocupamos de desarrollar el sentido de la gráfica como una totalidad, es decir, la curva representativa de una función es susceptible de operaciones sucesivas, primero por sus partes y luego como una entidad completa. De ahí pasamos a las operaciones con funciones para dar lugar al análisis de la forma por la naturaleza de sus componentes en el Capítulo 6. En este sentido, dicho capítulo permite introducir a las funciones a través de sus aproximaciones analíticas.

Por último, en el Capítulo 7 se ha realizado un extenso recorrido por diversos tipos de funciones y de familias de gráficas. Es aquí donde se presentan, a un nivel inicial, funciones trascendentes, como las funciones circulares e hiperbólicas, exponenciales y logarítmicas. Así mismo, presentamos una síntesis de los métodos que hemos empleado para resolver uno de los problemas que suele resultar más complicado, el de proponer una expresión analítica a una forma gráfica dada. Con esto esperamos que se sinteticen no sólo los métodos que se han trabajado a lo largo del libro, sino que se estructuren las diferentes formas de análisis mediante la visualización en un todo sistémico. Para ello, mostramos dos ejemplos que consideramos descriptivos de nuestra propuesta. El primero, inusual en los textos escolares, discute el sentido visual de la composición de funciones reales de variable real siguiendo una técnica de punteo, y el segundo, construye a los polinomios de Lagrange desde un enfoque novedoso, apoyado en el acercamiento que fue desarrollado a lo largo del libro.

Este libro resume la exploración desarrollada a lo largo de algunos años sobre el diseño y la implementación de un curso preparatorio para la matemática avanzada siguiendo estrategias de visualización. Algunas veces se le dio el tratamiento de un seminario sobre graficación de funciones, mientras que en otras fue discutido como el sentido visual de teoremas del análisis matemático o de las ecuaciones diferenciales. Por último, ha sido usado como un curso preparatorio al cálculo o de precálculo, como le suelen llamar en la tradición anglosajona, en el cual el sentido visual es desarrollado.

Los autores agradecemos toda sugerencia o comentario sobre la implementación de este material en clase pues, como toda obra, éste requiere de retroalimentación y sucesivos ensayos. Queremos señalar que se incorpora el uso del programa de geometría dinámica GeoGebra, porque brinda las condiciones técnicas adecuadas para llevar adelante nuestra propuesta; es una herramienta de acceso libre y, principalmente, un desarrollo tecnológico pensado desde y para la educación matemática. Cabe señalar que para la incorporación de esta herramienta tecnológica recibimos el apoyo incondicional de los estudiantes de la primera generación de la Maestría en la Enseñanza de las Matemáticas en la Educación Secundaria de la Escuela Normal Superior Federal de Oaxaca[1], quienes también son profesores en servicio del nivel de secundaria del sistema educativo público de dicho estado. A todos y todas ustedes, ¡gracias!

Ricardo Cantoral y Gisela Montiel

Ciudad de México, octubre de 2013.

[1]Adolfo Acevedo, Oscar Caballero, Domingo Cabrera, Mesías Camarillo, Oscar Cervantes, Santiago Cruz, Alí Cuevas, Rigoberto Díaz, Josefina Espinoza, Carlos Espinoza, Rodrigo García, Francisco García, Minerva García, Camelia Hernández, Rolando León, Joel López, César López, Macario López, Rebeca Morales, Mario Ordaz, Pedro Pérez, Héctor Rivera, Jorge Ruiz, Damara Sánchez, Andrés Sandoval, Esteban Sosa, Margarita Velasco y Rosa Castillo.

Capítulo 1

SOBRE LA VISUALIZACIÓN Y EL ARTE DE GRAFICAR

1.1 Graficación en la enseñanza de las matemáticas

Históricamente, el lenguaje visual en matemáticas ha jugado un rol muy importante para la comunicación de ideas, para la construcción de estrategias o para la explicación de problemas particulares; sin embargo, regularmente no goza de un estatus oficial en el lenguaje matemático formal. Por ejemplo, en la investigación hecha por García-Zatti y Montiel en 2008, se reporta el comportamiento de *cómo los profesores*, cuando interactúan como alumnos en un curso de posgrado, usan el contexto gráfico para caracterizar propiedades o nociones matemáticas, pero para formular y validar hacen uso de recursos analíticos; su lenguaje gráfico está subordinado a su lenguaje algebraico.

Llama la atención entonces que sea una pieza fundamental del discurso escolar. Parece no haber explicación de la derivada sin la representación gráfica de la recta secante que se hace tangente a la curva en un punto, o la exposición sobre las funciones sin usar curvas en el plano cartesiano, o la explicación de la conversión de grados a radianes sin usar una circunferencia, por mencionar algunos ejemplos típicos. Lo interesante en este punto es que además de jugar un papel indispensable en la explicación, tiene un efecto directo en lo que aprende el estudiante.

> [...]por un lado el lenguaje visual en matemáticas puede llegar a ser una fuente para actividades que promuevan nuevas ideas y pensamiento, por otro lado, la particularidad de cualquier diagrama, gráfica o ilustración reduce, regularmente, las imágenes del estudiante y lo conduce a pensamientos estereotípicos (Yerushalmy, 2005: 217).

Un ejemplo lo presentan Lacasta y Pascual (1998: 125) cuando señalan:

> El verdadero sentido de los teoremas de continuidad estudiados en los niveles superiores de secundaria se encuentra en la completitud de *R*, pero como ésta es una noción difícil de abordar, se desarrolla el gráfico como coartada que permite prescindir de ciertas nociones. De esta manera, el empleo del gráfico simplifica la matemática, pero puede producir errores y, finalmente, conducir a un bloqueo del proceso de enseñanza-aprendizaje.

A partir de esto explican *por qué* los estudiantes hablan de la *curva sin saltos* (huecos) para argumentar sobre la continuidad de una función.

En su mayoría, las investigaciones relacionadas con el manejo de representaciones gráficas o con el lenguaje visual, pusieron su atención en la relación o transferencia de información entre diferentes *marcos* de una noción matemática. Sin embargo, casi todas exploraban las ideas de estudiantes que habían llevado una instrucción más o menos tradicional en la graficación de funciones, aquélla donde al alumno se le proporciona una expresión

algebraica, sustituye valores numéricos en la variable independiente, calcula y tabula los valores de ambas variables (independiente y dependiente), localiza coordenadas en el plano, dibuja puntos y traza curvas que unen los puntos. De ahí que se considere que lo apropiado sería concluir sobre los efectos de la enseñanza y no sobre las capacidades de los estudiantes.

Una revisión global del discurso escolar asociado al tema de la graficación de funciones reales de variable real, permite extraer que, en esencia, son dos las formas clásicas de entender a la enseñanza de la graficación de las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$; una, la más difundida en el medio educativo, asume que la graficación es una *técnica o conjunto de técnicas que permiten bosquejar la gráfica de una función particular,* y otra, menos difundida, entiende a la graficación como *una forma de interpretar el sentido y significado de las funciones y de sus propiedades desde una perspectiva cognitiva*. Existen, sin embargo, posturas intermedias, al nivel de propuestas de enseñanza, en las que se acepta que esas dos visiones están estrechamente relacionadas. Quizá, ello obedece al hecho de que los niveles del desarrollo del pensamiento matemático requieren de la visualización en distintos grados y en esa medida la graficación de funciones es un medio adecuado para lograrla. Adicionalmente se fomenta en los tratamientos curriculares del precálculo, ya que éstos requieren de la graficación como medio de control del significado de objetos matemáticos como definiciones, teoremas y explicaciones de clase, entre otras.

Un estudio profundo realizado por Lacasta y Pascual (1998) sobre los diferentes usos del gráfico de funciones, señala que en la escuela los gráficos pueden usarse como:

- Ábacos, donde el gráfico se vuelve un instrumento simple y eficaz que permite deducir valores representados sobre una medida.
- Mensajes topológicos, donde el gráfico se convierte en un soporte de características de funciones genéricas.
- Ideograma, que puede representar una familia de funciones que permiten identificar una categoría de funciones.
- Elemento interactivo, donde el gráfico funciona como medio de control de la comunicación y de determinación de otro objeto. Este funcionamiento tiene lugar cuando la respuesta a un problema se obtiene mediante la relación efectiva con el gráfico.
- Estructura matemática, dándole a los marcos gráfico y algebraico un uso equilibrado poniendo en juego nuevos saberes.

Una visión intermedia a éstos, asume a la graficación, como una forma de construcción y tratamiento del universo de formas gráficas asociadas a las funciones, en donde se represente, transforme, genere, comunique, documente y refleje información gráfica, numérica, geométrica, algebraica o analítica. Vista así la graficación, se puede responder cómo es que los jóvenes y los adultos perciben dicho universo, o bien, saber cuáles son los códigos que se usan para descifrar y procesar la información visual que éstos contienen. Estas preguntas

han preocupado a los investigadores de la matemática educativa desde hace algunas décadas. Estos acercamientos planteaban la necesidad de construir nociones nuevas que dieran cuenta de la forma en que las personas se relacionan con su espacio y surjan nociones como visualización y percepción espacial. Lo que conduce a explorar la clase de las habilidades visuales que se necesitan para aprender, por ejemplo, geometría o análisis matemático.

1.2 Visualización en matemática educativa

Desde la perspectiva desarrollada por Jean Piaget, la concepción de espacio que desarrollan los niños, así como la noción de geometría que evoluciona entre ellos al describir las actividades representacionales del espacio, se entiende, como la imagen mental del espacio real en la cual los niños actúan, es decir, donde las representaciones mentales no son solamente evocadas por la memoria, sino mediante una reconstrucción activa de un objeto en un nivel simbólico. Las investigaciones, en este sentido, mantuvieron interés en las transformaciones mentales del espacio real de acuerdo con la representación espacial que presenta un niño, es decir, en aquellos atributos de los objetos reales que son invariantes bajo esas transformaciones y el cómo cambian con la edad. De acuerdo con la teoría de Piaget, las primeras transformaciones del niño son aquéllas que conservan los atributos topológicos de los objetos, tales como: el interior o exterior de un conjunto, la frontera de un conjunto, la conexidad o apertura y la cerradura de curvas. De acuerdo con las investigaciones piagetianas, sólo después el niño está capacitado para transferir a su espacio representacional atributos euclidianos de los objetos, como son la longitud de las líneas o el tamaño de los ángulos. Siendo entonces el momento donde se presentan ideas sobre la conservación de la longitud, el área o el volumen de los objetos geométricos.

A diferencia del acercamiento de Piaget, la teoría del profesor Van Hiele combina dos conceptos para geometría, uno donde la analiza como ciencia del espacio y otro donde la estudia como herramienta que permite demostrar la estructura matemática.

Una cuestión importante ligada a la percepción espacial, que no sólo se reduce a la geometría, trata de la visualización en las matemáticas. Por lo general, se entiende por visualización a la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual. Siendo un proceso mental muy útil en diversas áreas del conocimiento matemático y científico.

En matemáticas se utilizan diferentes representaciones que requieren de la visualización. Por ejemplo, para explicar las propiedades de inclusión, en la teoría de conjuntos se hace uso de dibujos como el que muestra la figura 1.1 para describir el caso en que el conjunto A queda contenido en el conjunto B.

Por otra parte, en el análisis de las funciones es usual tratar con representaciones visuales del concepto para describir propiedades como la paridad $f(x) = f(-x)$, la periodicidad $f(x) = f(x + k)$, o la traslación de funciones $y = f(x + a)$, $y = f(x-a)$, etcétera. En estos casos, el apoyo de recursos gráficos permite caracterizar propiedades que jugarán un papel importante en los resultados posteriores, como puede observarse en la figura 1.2.

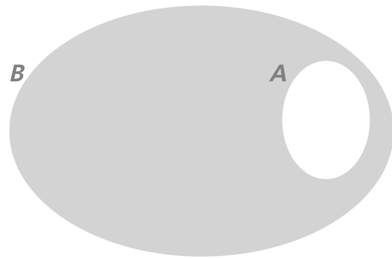


Figura 1.1 Conjunto A contenido en *B*, $A \subseteq B$.

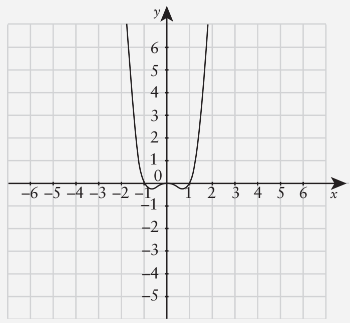
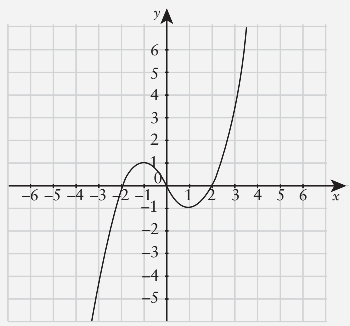
<table>
<tr><td>Caracterización analítica de una función par:
$f(x) = f(-x)$</td><td>Ejemplo de una función par:
$f(x) = x^2(x^2 - 1)$</td><td>Caracterización gráfica de una función par
</td></tr>
<tr><td colspan="3">Estas caracterizaciones de la paridad de una función, se utilizan para deducir y explicar resultados teóricos. Por ejemplo, si f es una función par definida sobre $[-a, a]$, entonces
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$</td></tr>
<tr><td>Caracterización analítica de una función impar:
$f(x) = -f(-x)$</td><td>Ejemplo de una función impar:
$f(x) = x(x^2 - 1)$</td><td>Caracterización gráfica de una función impar
</td></tr>
<tr><td colspan="3">Estas caracterizaciones de la imparidad de una función, se utilizan para deducir y explicar resultados teóricos. Por ejemplo, si f es una función impar definida sobre $[-a, a]$, entonces
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$</td></tr>
</table>

Figura 1.2 Caracterizaciones visuales y analíticas de la paridad e imparidad de funciones.

En años pasados, se publicó el libro de visualización en la enseñanza y el aprendizaje en matemáticas (Zimmermann y Cunningham, 1991), en el cual se discute desde diversas posturas teóricas el papel que la visualización podría tener en la formación matemática de los estudiantes. Un artículo en particular analizaba la resistencia por parte de los estudiantes a visualizar. Años atrás, en investigaciones propias, se había encontrado una fuerte correlación entre la habilidad para procesar información visual, con la capacidad de analizar información analítica relevante en el campo del cálculo y el análisis matemático. Nuestro grupo de trabajo produjo algunas investigaciones al respecto, los resultados se reportaron (Farfán, Albert y Arrieta, 2001; Cordero y Solís, 2001; Cantoral y Reséndiz, 2001; Zúñiga, 1993).

Estuvimos interesados en analizar la manera en que los estudiantes abordan problemas como los siguientes.

Ejemplo

1. Considera las variables reales x y y. Ambas variables representan números positivos. Demuestra entonces que la ecuación $x^y = y^x$ tiene una infinidad de soluciones reales, pero que sólo tiene dos soluciones enteras diferentes, es decir donde tanto x como y sean enteros tales que x es diferente de y.

2. Considera la recta que aparece en la figura 1.3a. Imagina que el origen de coordenadas funciona como un pivote que le permite a la recta "girar" sobre ese punto. Considera que gira la recta en el sentido antihorario y mide el ángulo al que puede girar sin que deje de representar una función respecto de x.

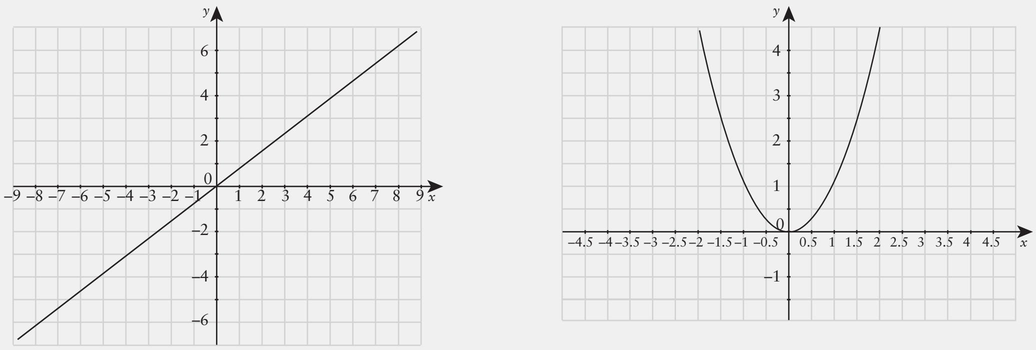


Figura 1.3 Giro de una recta sin dejar de representar una función.

Digamos que si la recta gira menos de 45°, entonces seguirá siendo una función de x. La pregunta es ahora ¿hasta cuánto podría girar la parábola que aparece en la figura 1.3b en el mismo sentido antihorario, pero de manera que siga siendo una función de x?

3. ¿Por qué es incorrecto el siguiente cálculo: $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2} dx = -2$?
4. ¿Qué entiendes por visualización en matemáticas?

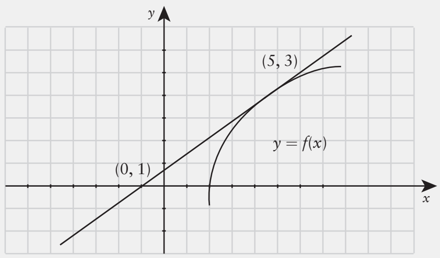
En todos los casos, se encuentran una serie de regularidades al estudiar el tipo de respuestas de los estudiantes.

Una propuesta de exploración con estudiantes se presenta en el artículo de Zimmermann y Cunningham (1991), donde se muestra un examen en el que se afirma que la mayoría de los estudiantes presentan dificultades al intentar resolverlo. A continuación se reproduce dicho examen, con el fin de que ustedes intenten resolverlo. Se invita al lector que proponga a sus alumnos o a sus colegas esta actividad adaptándola al nivel escolar en el que se encuentre.

Ejemplo

UN TEST DONDE LA MAYORÍA DE LOS ESTUDIANTES DE CÁLCULO FALLAN

1. Suponga que la recta L es tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(5, 3)$ como se indica en la siguiente figura. Encuentre $f(5)$ y $f'(5)$.

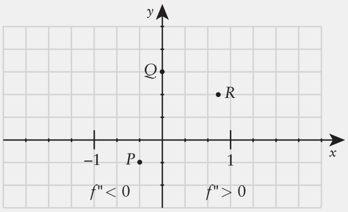


2. ¿Por qué es incorrecta $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^{1} x^{-2} dx = \left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_{-1}^{1} = \left[\frac{-1}{x}\right]_{-1}^{1} = \frac{-1}{1} - \frac{-1}{-1} = -2$?
3. Encuentre la pendiente máxima de la gráfica de $y = -x^3 + 3x^2 + 9x - 27$.
4. Evalúe $\int_{-3}^{3} |x+2|\, dx$
5. Usando la gráfica de $dy / dx = f'(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3$, bosqueje la gráfica de la función $y = f(x)$.

6. Si f es una función impar sobre $[-a, a]$, evalúe $\int_{-a}^{a}(b+(f(x)))\,dx$

7. Sea $f(x)=\begin{cases} ax & x\leq 1 \\ bx^2+x+1 & x>1 \end{cases}$ encuentre a y b, tales que f sea derivable en 1.

8. En el siguiente diagrama P, Q y R son puntos sobre la gráfica de f. Para todo x, $-1< x < 0$, $f''(x) < 0$ y parta toda x, $0 < x < 1$, $f''(x) > 0$. Si la derivada de f en $[-1, 1]$ existe, ¿cuál es el correcto?



a) $f'(0) = 0$.

b) f tiene un máximo en $x = 0$.

c) f tiene un mínimo en $x = 0$.

d) Existe un número c, $-1 < c < 0$ para el cual f tiene un máximo.

e) Existe un número d, $0 < d < 1$ para el cual f tiene un máximo.

9. Dada f una función derivable, tal que $f(-x) = -f(x)$. Entonces para cualquier a, tenemos:

a) $f'(-a) = -f'(-a)$

b) $f'(-a) = f'(a)$

c) $f'(-a) = -f'(a)$

d) Ninguna de las anteriores.

10. Suponga que f es una función continua. ¿Cuál de las siguientes opciones es correcta?

a) $\int_{a}^{b} f(x-k)\,dx = \int_{a-k}^{b-k} f(x)dx$

b) $\int_{a}^{b} f(x-k)\,dx = \int_{a}^{b} f(x+k)dx$

c) $\int_{a}^{b} f(x-k)\,dx = \int_{a+k}^{b+k} f(x)dx$

d) $\int_{a}^{b} f(x-k)\,dx = \int_{a+k}^{b+k} f(x+k)dx$

e) Ninguna de las anteriores.

En este libro se abordarán estrategias que permitan desarrollar la visualización en matemáticas particularmente referidas a la construcción y análisis de las gráficas de funciones reales de una variable real. Como se puede advertir, el desarrollo del pensamiento matemático entre los estudiantes precisa de procesos temporalmente prolongados y que suelen ser mayores a los que la escuela ofrece. Supone, por una parte, de una maestría en el dominio de la matemática y de los procesos del pensamiento asociados, pero exige simultáneamente de rupturas con estilos del pensamiento previo.

Para acceder a un desarrollo de la visualización en matemáticas se precisa, entre otras cosas, del manejo de un universo vasto de formas gráficas y rico en significados por parte de quien aprende. El conocimiento superficial de la recta y la parábola no son suficientes para desarrollar las competencias esperadas en los cursos.

Desde el punto de vista del sistema de enseñanza, los cursos de precálculo (o de preparación al cálculo) tradicionalmente se conforman por un repertorio de procedimientos y algoritmos provenientes esencialmente del álgebra y de la geometría analítica, tocando con mayor o menor énfasis el estudio del concepto de función, habitualmente entendido en el sentido de la definición de Dirichlet-Bourbaki. Su enseñanza tiende a sobrevalorar los aspectos analíticos y los procedimientos algorítmicos, dejando de lado a los argumentos visuales o a los enfoques numéricos.

Desde nuestra perspectiva, la naturaleza del concepto de función es en extremo compleja, su desarrollo se ha hecho casi a la par que evoluciona la cultura humana, pues encontramos vestigios del uso de correspondencias mediante tablas en la antigüedad y actualmente se debate sobre la vigencia, en el ámbito de las matemáticas, del paradigma de la función como un objeto analítico. Como se señala en Cantoral y Farfán (1998), el concepto de función devino protagónico hasta que se le concibe como una fórmula, es decir, hasta que logró la integración de dos dominios de representación: el álgebra y la geometría. La complejidad del concepto de función se refleja en las diversas concepciones y representaciones con las que tratan los estudiantes y profesores. Una extensa lista de obstáculos epistemológicos relativos al concepto de función se encuentra en el artículo de Ana Sierpinska publicado en Dubinsky y Harel en 1992.

Desde el punto de vista de las funciones cognitivas, los objetos inmersos en el campo conceptual del análisis son particularmente complejos a este nivel, como en el caso que nos ocupa, la presentación habitual de la noción de función se presenta como un procedimiento que se aplica a unos ciertos objetos llamados números; este mismo concepto, el de función, deviene en objeto al ser operado bajo otro proceso como la diferenciación o la integración y se sigue hasta nociones aún más avanzadas. De modo que al iniciar un curso de análisis, el estudiante debe concebir a la función como un objeto, y por lo tanto, deberá estar sujeta a las operaciones que otro procedimiento efectúe sobre ella. De otro

modo, ¿qué significa operar un proceso? En nuestras experiencias con profesores en servicio en la educación media y superior hemos constatado que en caso de que se logren incorporar elementos visuales como parte de la actividad matemática de los estudiantes al enfrentar problemas, entonces se suele manejar a la función no sólo como objeto, lo que ya es un gran logro, sino que además pueden transitar entre los contextos algebraico, geométrico, numérico, icónico y verbal con cierta versatilidad; en otras palabras, en caso de tener un dominio del contexto visual tanto en la algoritmia y la intuición, como en la argumentación, será posible entonces el tránsito entre las diversas representaciones. El problema didáctico en consecuencia, estriba fundamentalmente en la dificultad cognitiva para adquirir maestría en el contexto geométrico; por ejemplo, en el plano de la argumentación es mucho más fácil mostrar la existencia de una raíz doble de manera algebraica que de forma geométrica, razón por la cual en la enseñanza se acude al refugio algorítmico con facilidad.

La hipótesis central, entonces, después de un análisis socioepistemológico a profundidad como el que se desarrolla en Farfán (1997), consiste en asumir que: previo al estudio del cálculo se precisa de la adquisición de un lenguaje gráfico que posibilite, esencialmente, la transferencia de campos conceptuales virtualmente ajenos a causa de las enseñanzas tradicionales, estableciendo un isomorfismo operativo entre el álgebra básica y el estudio de curvas, mejor aún, entre el lenguaje algebraico y el lenguaje gráfico.

Esta hipótesis ha sido desarrollada tomando dos directrices. En primer término, se presenta la posibilidad de operar gráficas en analogía con los números o las variables, dando sentido a operaciones fundamentales como las que se enuncian a continuación:

$-f(x)$ y $f(-x)$	Reflexión respecto del eje x y del eje y respectivamente.
$f(x+a)$ y $f(x-a)$	Traslación con dirección en el eje x.
$f(x)+a$ y $f(x)-a$	Traslación con dirección en el eje y.
$af(x)$	Contracción o dilatación respecto del eje y.
$f^{-1}(x)$	Reflexión respecto de la recta $y = x$.
$1/f(x)$	Convierte ceros en asíntotas y viceversa, las regiones donde $\lvert y\rvert > 1$ se mandan hacia $\lvert y\rvert < 1$ y viceversa, dejando intactos a los puntos sobre las rectas $y = 1$ y $y = -1$.
$\lvert f(x)\rvert$ y $f(\lvert x\rvert)$	Reflexión de las imágenes negativas al simétrico positivo respecto del eje x y reflexión de sustitución del lado de la gráfica con ordenadas negativas por la reflexión del lado de la gráfica con ordenadas positivas, respectivamente.

El segundo aspecto relevante lo constituye la posibilidad de construir un universo amplio de funciones a partir de tres funciones primitivas de referencias:

- La función identidad $f(x) = x$.
- La función exponencial $f(x) = a^x$.
- La función sinusoidal $f(x) = \operatorname{sen} x$.

Todas ellas son la base para construir las funciones elementales en el sentido de Cauchy, las cuales sirven para construir gráficamente, operando a las gráficas, a las funciones algebraicas, logarítmicas, exponenciales y trigonométricas, respectivamente.

En este acercamiento ha resultado importante plantear situaciones-problema que involucren enunciados algebraicos que favorezcan el uso del lenguaje gráfico. Por ejemplo, resolver la desigualdad $\dfrac{|x-a|+|x-b|}{|x+b|+|x+a|} \leq kx$, con las estrategias tradicionales para la resolución de desigualdades es una tarea muy complicada; sin embargo, con un enfoque visual es desarrollada como estrategia de enseñanza (Farfán, Albert y Arrieta, 1997). Para todo ello es necesario operar algebraicamente a fin de obtener la gráfica de las funciones involucradas para que finalmente sean comparadas y se encuentren en condiciones de resolver de este modo los sistemas de ecuaciones a que haya lugar. Asimismo, para buscar los extremos de funciones como la siguiente; $\dfrac{x}{ax^2+b}$ tomando a y b positivos, logramos avanzar en la construcción del puente entre contextos, pues la tarea en el contexto gráfico sirve de guía a la sintaxis algebraica, de modo que ésta refuerza su significado.

Analicemos otro ejemplo de los problemas que se han planteado sobre visualización y desarrollo del pensamiento, así como sobre lenguaje variacional. Se diseña un conjunto de cuatro tareas relacionadas unas con otras, se propone al mismo tiempo, una colección de cuatro gráficas idénticas, como la que se muestra más adelante, y les pedimos que utilicen una gráfica para cada inciso, de modo que deben marcar *sobre la gráfica* la porción en la que se cumpla sólo uno de los siguientes cuatro incisos:

a) $f(x) > 0$,
b) $f'(x) > 0$,
c) $f''(x) > 0$,
d) $f'''(x) > 0$.

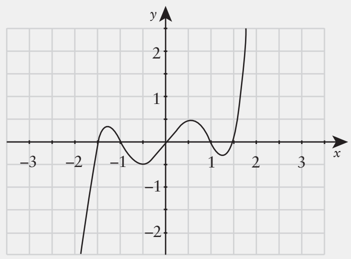
Se espera que sus respuestas indiquen las estrategias variacionales que se utilizan y las formas en cómo argumentan su elección frente a sus compañeros de clase. Claramente, como hemos comprobado, la pregunta más compleja para ellos resulta ser la última, pues

es ahí donde se exige el uso de estrategias variacionales como única posibilidad de solución del problema.

Ejemplo

Pregunta 1

Marca sobre la gráfica de la función que aparece enseguida, la porción que consideres cumple con la condición $f(x) > 0$.

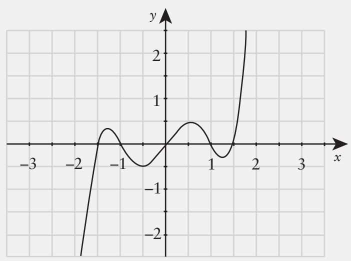


En este caso, los estudiantes suelen recordar, basados en su enseñanza previa, que la ubicación en los cuadrantes I, II, III y IV determina el signo de la imagen de la función; de modo que las ordenadas positivas estarán en los dos primeros cuadrantes, mientras que las negativas en los restantes. De ahí que contesten esta cuestión con relativa facilidad.

Ejemplo

Pregunta 2

Marca sobre la gráfica de la función que aparece enseguida la porción que consideres cumple con la condición $f'(x) > 0$.

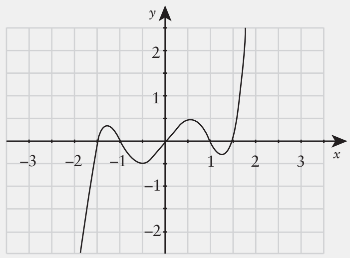


Los estudiantes, en esta oportunidad, confunden con frecuencia el signo de la derivada con el de la función, o en otro caso, recuerdan que las pendientes de las tangentes a la curva determinan el signo de la derivada, de modo que se tendrá para pendientes positivas correspondientes derivadas positivas. Este cambio de registro, la pregunta planteada en el contexto simbólico con apoyo visual, y la respuesta construida en el contexto visual, resulta mucho más complicado para los estudiantes y ello se expresa en dos sentidos, por un lado, la proporción de respuestas acertadas es bajo y por otro, las explicaciones que utilizan son escasas y evidentemente escuetas.

Ejemplo

Pregunta 3

Marca sobre la gráfica de la función que aparece enseguida, la porción que consideres cumple con la condición $f''(x) > 0$.



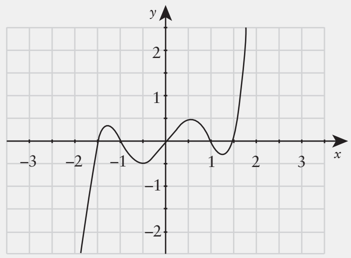
Como podíamos prever, ahora la situación resultaría más compleja. Pues exige de niveles progresivos de abstracción. El recurso dominante en las respuestas de los alumnos resulta ser la memoria. Dado que ellos suelen recordar que la segunda derivada positiva corresponde con la concavidad hacia arriba, en tanto que la concavidad hacia abajo está asociada con la segunda derivada negativa, aunque no dispongan de explicación alguna para confirmar su razonamiento, pueden contestar a la pregunta. De acuerdo al análisis realizado, se observa que de sus respuestas no se desprende la existencia de algún otro argumento que permita enfrentar la situación planteada. De hecho, es usual entre los alumnos disponer de un método mnemotécnico para establecer estas correspondencias, “es cóncava hacia arriba entonces retienen más agua, si lo es hacia abajo retendrá menos agua, de hecho tirará el agua”. Este símil con una cubeta llena de agua puede aparecer como una estrategia para refrescar la memoria. Naturalmente, ello no parece implicar estrategias propiamente variacionales.

La última de las cuestiones ponía en evidencia este hallazgo, pues se trata de una situación en la cual no es posible recordar algún conocimiento previo, pues el tema no ha sido tratado en su enseñanza convencional.

Ejemplo

Pregunta 4

Marca sobre la gráfica de la función que aparece enseguida la porción que consideres cumple con la condición $f'''(x) > 0$.



Esta pregunta suele plantear un reto especial, tanto a los estudiantes como a los profesores, pues aunque entienden efectivamente el enunciado del problema, no pueden construir una respuesta que les parezca convincente. Esta dificultad se agudiza si en la pregunta se eleva el orden de la derivada involucrada, dado que se carece de elementos cognitivos y didácticos que les permitan construir una respuesta adecuada. Se considera, que es en este momento cuando ellos se encuentran en una situación de aprendizaje, ya que la serie de tareas anteriores les permite, aunque fuese sólo con recursos mnemotécnicos, dar una respuesta a las preguntas planteadas. Sin embargo, la cuarta cuestión plantea una problemática no prevista por ellos, el éxito en la pregunta radica en poder descifrar los códigos variacionales y articularlos en signos variacionales, pues la respuesta habrá de ser construida. En este momento, los estudiantes y los profesores suelen entrar en una situación de aprendizaje muy rica. Sólo quienes han dominado algunas de las estrategias del pensamiento y el lenguaje variacional pueden abordarla eficazmente. Se concluye, en este sentido, que el manejo simultáneo y coordinado de las derivadas sucesivas parece ser una condición sin la cual la formación de la noción de derivada y en consecuencia de la noción de predicción deviene inevitablemente frágil.

1.3 Integración tecnológica en los ambientes de aprendizaje

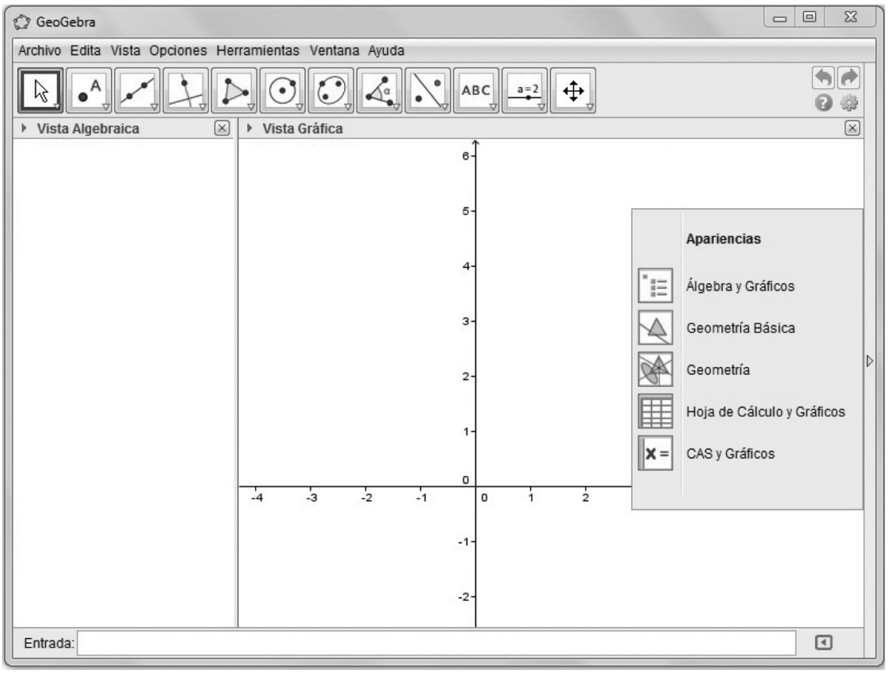
Algunas de las actividades de este libro retoman esta filosofía, así como los resultados de la investigación contemporánea. Para ello se ha elegido el programa GeoGebra, que es un *software* de tecnología educativa que reúne dinámicamente geometría, álgebra y cálculo.

Desarrollado por Markus Hohenwarter junto con un equipo internacional de colaboradores para la enseñanza de la matemática. El programa resulta adecuado para nuestros fines didácticos porque cuenta con las herramientas de construcción y exploración gráfica que nos permitirán el desarrollo de las actividades propuestas.

En nuestro campo disciplinar, las peculiaridades tecnológicas se consideran variables didácticas, son elementos propios del escenario que evidentemente condicionan la actividad didáctica. Sin embargo, partimos de la hipótesis de que el aprendizaje y lo aprendido quedarán matizados por el escenario, es decir, por la mediación de la tecnología, por el uso de interfaces visuales, por la relación entre contextos gráfico-numérico-geométrico. Considerando los referentes teóricos expuestos previamente, estamos hablando de una reorganización del pensamiento y de la actividad del que aprende, así como de un importante rediseño y reorganización discursiva del objeto a estudiar; en consecuencia, de nuevas formas de aprender y de enseñar.

Para facilitar la resolución de las actividades se han incluido en el Anexo I algunas indicaciones básicas para que el empleo del GeoGebra sencillo y breve. Es necesario instalar previamente el GeoGebra en un equipo de cómputo. Aunque actualmente hay versión del programa para dispositivos móviles, aquí mostraremos las pantallas del programa instalado en una computadora personal. Además, hay versiones para varias plataformas, incluyendo Windows y Mac, y todas pueden descargarse desde el sitio www.geogebra.org

El instalador indicará cuando se haya completado la instalación mostrando el botón "Terminar" e inmediatamente abrirá GeoGebra, presentando la siguiente ventana:



Capítulo 2

UNA INTRODUCCIÓN A LAS FUNCIONES Y SUS GRÁFICAS

2.1 Un primer acercamiento al concepto

El concepto de *función* es fundamental en matemáticas, ciencia y tecnología. Además, se utiliza en casi todas las ramas de las matemáticas contemporáneas, razón por la cual el concepto es de gran generalidad. Veamos algunas de sus definiciones:

"Llamamos función de una magnitud variable a una cantidad que es compuesta de cualquier manera posible de esa magnitud variable y de constantes".

JOHANN BERNOULLI (1718).

"Si ahora para cualquier x existe una única correspondiente y finita [...] entonces y es llamada función de x para ese intervalo. Esta definición no requiere de una regla común para las diferentes partes de una curva; uno puede imaginar la curva como compuesta de las más heterogéneas componentes o como trazada sin seguir ninguna ley".

DIRICHLET (1837).

Una función permite modelar la evolución de fenómenos naturales y sintetizar procedimientos, así como la distribución de temperaturas en cada punto de una superficie, a la vez que estima el valor de un producto comercial en función de la inflación esperada en unos meses. Gracias al concepto de función, podemos saber, por ejemplo, cuál es la dosis adecuada de medicamento que habrá de tomar un paciente enfermo.

Figura 2.1 Johann Bernoulli, matemático suizo.

Las funciones permiten estudiar las relaciones que se establecen entre variables; en este libro se trabajará particularmente con funciones reales de una variable real, es decir, se hará énfasis en el estudio de correspondencias entre dos variables reales.

Como se sabe, las funciones reales $y = f(x)$ de una variable real x fueron, desde Descartes, la herramienta fundamental para el estudio de curvas geométricas y, desde Galileo, para los cálculos mecánicos y astronómicos. La palabra *functio* fue propuesta por Leibniz y por John Bernoulli, mientras que el símbolo f fue introducido por Euler (1734).

En la época de Leibniz, Bernoulli y Euler, las funciones reales fueron pensadas como expresiones compuestas por entidades

algebraicas. Durante el siglo diecinueve, principalmente bajo la influencia de la teoría analítica del calor de Fourier y el estudio que hiciera Dirchlet de las series de Fourier, se edificó una noción de función aún más amplia según la cual, una función podría ser entendida como *cualquier curva libremente trazada* o *cualquier asociación de valores de y definidos en dependencia de los valores asignados a x*.

Nuestra atención se limitará a funciones de una clase muy particular, funciones reales de variable real. Pensemos que una función puede entenderse como una regla que asigna a cada uno de ciertos números reales un número real, por ejemplo, ilustremos esto con frases como las siguientes:

- La regla que asocia a cada número real su cuadrado.
- La regla que asocia a cada número real su mayor entero menor o igual que él.
- La regla que asocia a cada número real no negativo, su raíz cuadrada.
- La regla que asocia a cada número real x entre -1 y 1, el número real $\sqrt{1-x^2}$.
- La regla que asocia a cada número real el número de veces que aparece el 2 en los primeros diez dígitos de su expansión decimal.
- La regla que asocia a cada número racional el número 1, y a cada número irracional el 0.
- La regla que asocia a cada número real diferente de 1, el número p, y al 1 le asocia el número real que usted quiera.
- La regla que asigna a todo número real $x \neq 1$ y $x \neq -1$, el número $\dfrac{3x^4 - x^2 + 1}{x^2 - 1}$.

Es importante observar que las funciones no necesariamente están dadas por fórmulas algebraicas, como se acaba de constatar; sin embargo, aquellas funciones que están dadas por fórmulas son de mucha utilidad en diversos campos de las matemáticas y de las ciencias; por ello, es que resultan objeto de estudio en cualquier currículo contemporáneo. El conjunto de números a los cuales se aplica una función recibe el nombre de *dominio* de la función.

A continuación se muestran dos de las definiciones que suelen presentarse en los libros de texto contemporáneos, ambas aunque equivalentes, son usadas con propósitos diversos.

Definición de función como relación entre variables

Una función es una relación entre variables tal que a cada valor de la primera variable (variable independiente) le corresponde sólo un valor de la segunda variable (variable dependiente). Si x representa a la variable independiente, y describe a la variable dependiente; esto se suele escribir como $y = f(x)$ con el fin de representar el hecho de que la variable y está en función, depende, de la variable x.

Definición de función como correspondencia entre conjuntos

Una función $f{:}A \to B$ consiste de dos conjuntos, el dominio A y el rango B. Esta correspondencia es denotada por $y = f(x)$ o $x \mapsto f(x)$. La expresión $f(x)$ representa entonces al valor de f en x, lo que también se conoce como la imagen de x bajo f.

Estas definiciones, como la gran mayoría de las que usan en matemáticas, son el producto de profundas síntesis que suelen ser realizadas por generaciones enteras de científicos. De modo, que se suele decir, "la noción de función del siglo diecinueve", o "la noción de función de la escuela euleriana". Sin embargo, para quienes están interesados en los aprendizajes, saben que los conceptos no se pueden reducir a su definición, pues de hacerlo, se corre el riesgo de no producir aprendizajes entre los estudiantes. Por esa razón se muestran a continuación formas diversas de definir, caracterizar y trabajar con la definición de función, para lograr una resignificación del concepto a partir de su exploración numérica, analítica y gráfica. En este capítulo entonces, se trata el concepto de función desde el punto de vista de su aprendizaje, es así que se ha optado por desarrollar y proponer al lector una serie de actividades matemáticas que permiten desarrollar habilidades para su tratamiento.

Aunque la definición moderna del concepto de función que domina en la literatura escolar es la definición de Dirichlet-Bourbuaki, que trata de la correspondencia entre conjuntos sin especificar la naturaleza de éstos, en este caso trabajaremos exclusivamente con conjuntos de números reales y más particularmente con intervalos o reuniones finitas de intervalos. En nuestra opinión, es en este tipo de conjuntos que puede desarrollarse, en su etapa inicial, el sentido de función, que antecede a una generalización mayor. Adicionalmente, el tratamiento que se sigue en este libro pone particular atención en distintas representaciones del concepto de función, de modo que con frecuencia se hablará de la función como una regla de correspondencia, como una fórmula explícita, una curva representativa, una tabla de valores, una correspondencia arbitraria y una relación de dependencia.

Iniciamos este capítulo con la clasificación de las funciones que diera Euler en 1748 (figura 2.2). Es importante saber que hoy en día dicha clasificación sigue siendo válida y puede

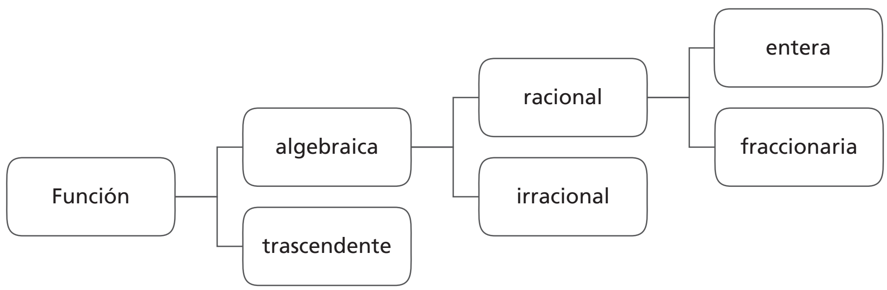


Figura 2.2 Clasificación de las funciones según Euler.

ayudar a entender algunos aspectos importantes de las funciones. De hecho, en este libro, siguiendo la terminología de Euler, se trabaja con funciones algebraicas y trascendentes. La mayor parte del tratamiento se hará con funciones polinomiales y con funciones racionales. En la parte final del libro se hará una introducción a algunas de las funciones trascendentes más usuales en la enseñanza.

Una función polinomial de x en los reales, tiene la siguiente expresión algebraica, $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$, donde $a_0, \ldots, a_n$ son números reales. Si $a_n \neq 0$ se dice que la función polinomial es de grado n. Según la clasificación euleriana, un polinomio es entonces una función algebraica racional entera. Por ejemplo, la función dada por la fórmula $f(x) = 5x^6 + 3x - 1$ es una función polinomial de grado seis.

Una clase más amplia de funciones son las racionales, de hecho ellas incluyen a las *funciones polinomiales* o *polinómicas*, pues una función racional es aquella que se expresa como el cociente de dos funciones polinómicas. Algunos ejemplos de funciones racionales, son:

- $f(x) = \dfrac{5x^3 + 2x - 3}{3x^4 - 1}$,
- $f(x) = \dfrac{1}{x}$ y
- $f(x) = x + 1$.

Esta última función, también es racional, ¿por qué?

Una función que a cada x real, le asocia un número real c, es decir, que a cada x le asocia el mismo número c, se denomina *función constante*. Por ejemplo, las funciones $f(x) = \dfrac{5}{3}$, $f(x) = 1$, $f(x) = -3$ ó $f(x) = \sqrt{5}$ son funciones constantes. Asimismo, se conoce como *función lineal* a aquella para la cual, a cada real x le asocia el número $ax + b$, con a y b reales, y a diferente de cero. *Función cuadrática* por su parte, es aquella que asocia a cada real x, el número real $ax^2 + bx + c$, donde a, b y c son reales y a no es cero; la cúbica, cuártica, etcétera, tienen naturalmente asociadas respectivamente expresiones algebraicas de grado tres, cuatro, etcétera. Dichas notaciones fueron establecidas con el paso del tiempo. Por ejemplo, en el siglo diecisiete Newton tenía la necesidad de aclarar el sentido de sus notaciones, él decía:

> "Aquí será propio observar, que hago uso de x^{-1}, x^{-2}, x^{-3}, x^{-4},… para $\dfrac{1}{x}, \dfrac{1}{x^2}, \dfrac{1}{x^3}, \dfrac{1}{x^4}$,… y de $x^{\frac{1}{2}}, x^{\frac{3}{2}}, x^{\frac{5}{2}}, x^{\frac{1}{3}}, x^{\frac{2}{3}}$,… para $\sqrt{x}, \sqrt{x^3}, \sqrt{x^5}, \sqrt[3]{x}, \sqrt[3]{x^2} \ldots$"
>
> (Newton, 1671).

2.2 Presentación de las funciones

Mediante una expresión explícita

La expresión $f(x) = x - x^2$, nos permite asociar a cada número real x, el número $x - x^2$. Así, para $x = 1$, se asocia el número $1 - 1^2 = 1 - 1 = 0$, y se dice entonces que 0 es la imagen del 1 bajo la función f. De manera general, se dice que x tiene a $x - x^2$ por imagen bajo f. Algunos ejemplos de funciones explícitas son:

- $f(x) = x - 3x^2 + 0.7x^3$
- $f(x) = x^{1/3} + 1$
- $f(x) = 2x^2 + 1$
- $f(x) = x^2 - 1$
- $f(x) = 1/x$
- $f(x) = (x - 3)(x - 5)^2$
- $f(x) = (x - 3)^2/(x + 1)^3$
- $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 + 2x}{x - 1}}$

Con la ayuda de instrucciones en GeoGebra

Otra forma de apoyo para el entendimiento del concepto de función es mediante instrucciones específicas de algún *software* como GeoGebra, con el cual se pueden obtener los valores imagen de funciones. Por ejemplo, para $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots, 16$ se asocia el número $= 0, = 1, = 1.41, \ldots, = 4$ respectivamente. De modo que la secuencia para introducir una serie de datos en GeoGebra es la siguiente:

- Una vez iniciado GeoGebra en un documento nuevo, ir a la barra de menú “Vista” (figura 2.3) y seleccionar la opción “Hoja de Cálculo”.

Figura 2.3 Menú Vista.

- En la hoja de cálculo escribimos la serie de números del 0 al 16 como se muestra en la figura 2.4. Para escribir la etiqueta “x” es necesario ingresar en la celda A1 la instrucción = “x”.

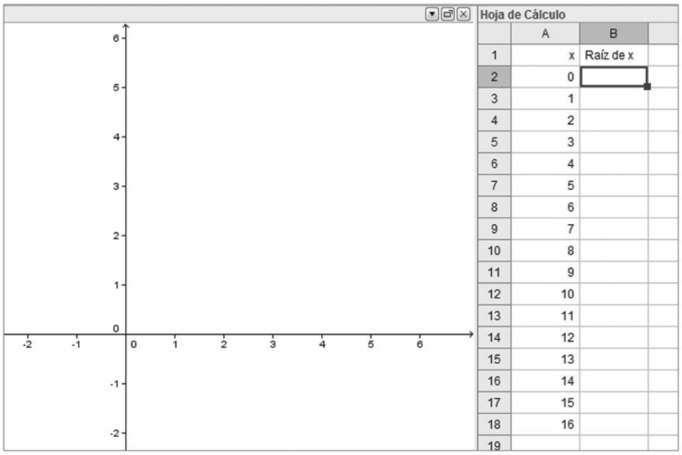


Figura 2.4 Introducción de valores a una hoja de cálculo en GeoGebra.

- Inserta la instrucción =**sqrt**(**A2**) ver figura 2.5. **E**l signo “=” indica que se escribirá una función, sqrt() es la función raíz cuadrada del valor contenido en los paréntesis y **A2** es la celda que contiene el valor en el que será evaluada la función.

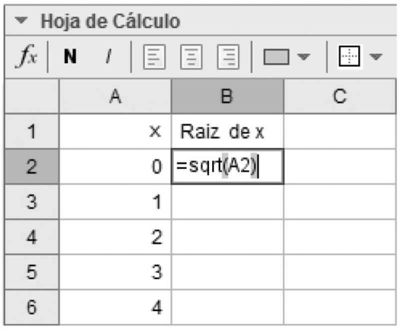


Figura 2.5 Introducción de una fórmula en una hoja de cálculo.

- Posiciona el cursor en la esquina inferior derecha, se selecciona y se arrastra hacia abajo hasta la celda 18 (ver figura 2.6). Con esto se copia la fórmula de la celda B2, pero el argumento de la función “sqrt” irá tomando los valores de la celda A3 a la celda A18.

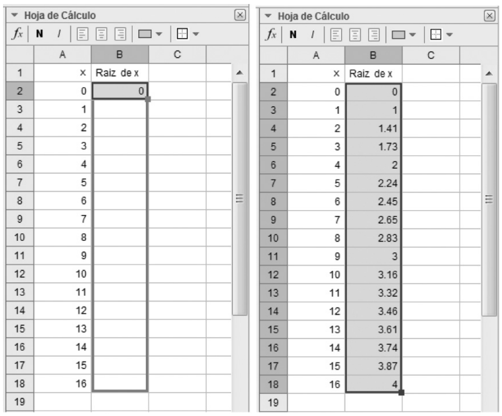


Figura 2.6 Extender los valores de una fórmula en la hoja de cálculo.

- Selecciona los valores y del menú emergente (clic al botón derecho del *mouse*) elige la opción "Crea" y después "Lista de puntos" (figura 2.7a).

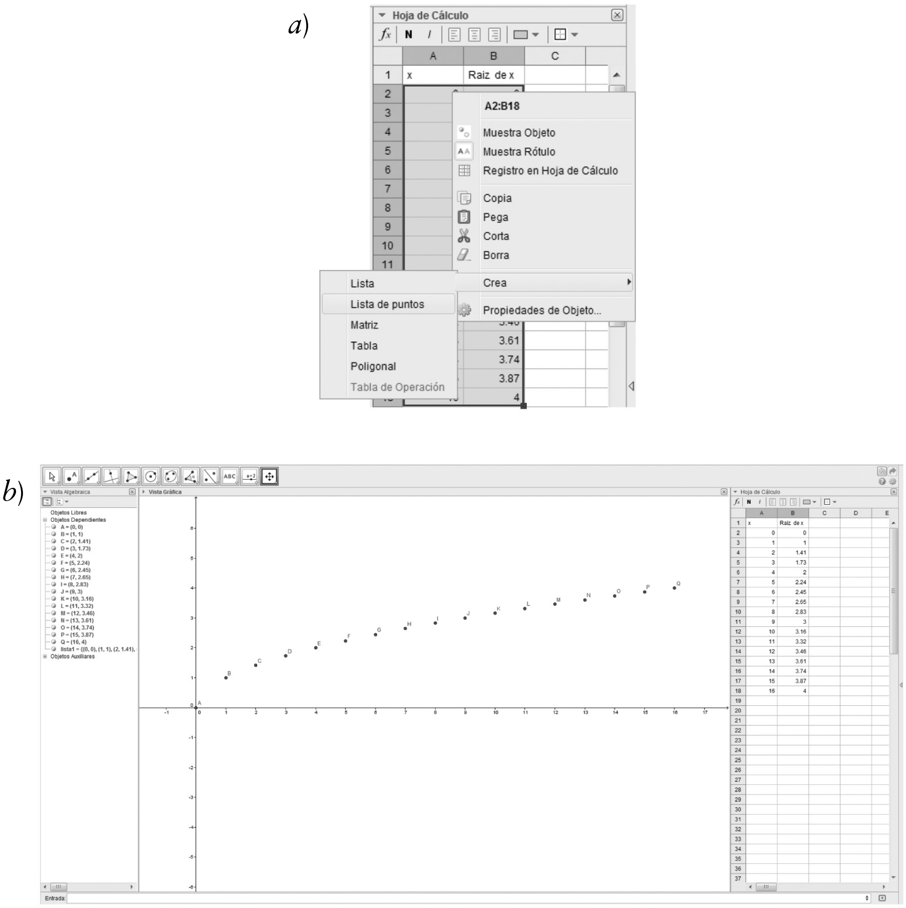


Figura 2.7 La imagen *a*) muestra las instrucciones para generar una lista de datos y la imagen *b*) muestra la lista de puntos en el plano a partir de los datos en la hoja de cálculo.

Con el ejercicio anterior ubicamos algunos puntos de la función raíz cuadrada de x. Ahora para unir los puntos en el plano, definimos la función que nos permite asociar a todo número positivo, su raíz cuadrada. Esta función, a la que llamaremos f, está definida sobre el intervalo $[0, \infty]$ mediante la fórmula $f(x) = \sqrt{x}$. En GeoGebra se define como $f(x)$ = ***sqrt(x)***. y para graficarla debemos introducir esta instrucción en "la línea de edición" (figura 2.8):

Figura 2.8 Definición de la función en la línea de edición.

- Pulsa Enter para que aparezca la gráfica en el plano (figura 2.9).

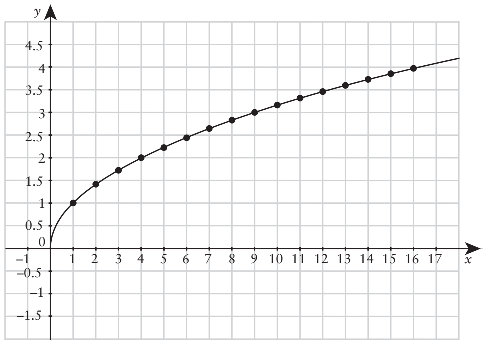


Figura 2.9 Gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x}$.

En la figura 2.9 se puede apreciar la serie de puntos que forma la curva de la función $f(x) = \sqrt{x}$, iniciando en 0 y terminando en $+\infty$.

Ahora se considerará introducir, en una nueva ventana, la siguiente función $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x}$.

- En la "línea de edición" introduce la instrucción (figura 2.10a): $f(x) = (x$^$2+2)/x$ y pulsa Enter para obtener la gráfica de la función (figura 2.10b).

a)

b)

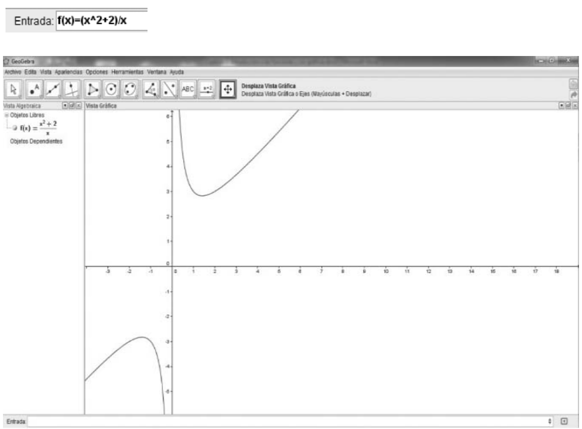


Figura 2.10. En la imagen ***a***) se muestra la instrucción en la línea de edición y la imagen ***b***) muestra la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x}$.

La gráfica de la figura 2.10b representa a la función dada por la fórmula $\dfrac{x^2+2}{x}$, de modo que si asignamos a la x el valor de 2, tendríamos que sustituir en la fórmula de la siguiente manera: $\dfrac{2^2+2}{2}$, y obtendríamos el valor $f(2)=\dfrac{2^2+2}{2}=3$. Para hacer el cálculo para varios valores de x utilicemos la vista Hoja de Cálculo en GeoGebra.

- Dentro de la hoja de cálculo introduce, en la celda A1, la etiqueta de variable x (instrucciones: =“x”); y en la celda B1 la etiqueta para la función (instrucciones: =”$f(x)$ = $(x$^2+2$)/x$”). A partir de la celda A2, ingresa en la columna los valores de x que se quieran sustituir en la función (figura 2.11a).
- En la celda B2 introduce la instrucción =(**A2^2+2**)/**A2**), para calcular el valor de la función cuando la variable x tome el valor de la celda A2; al pulsar Enter obtendrás el valor para $f(x)$ (figura 2.11b).
- Extiende el valor de la fórmula en la celda B2 hasta B22, para obtener todos los valores de la función cuando x toma los valores definidos en la columna A (figura 2.11c).

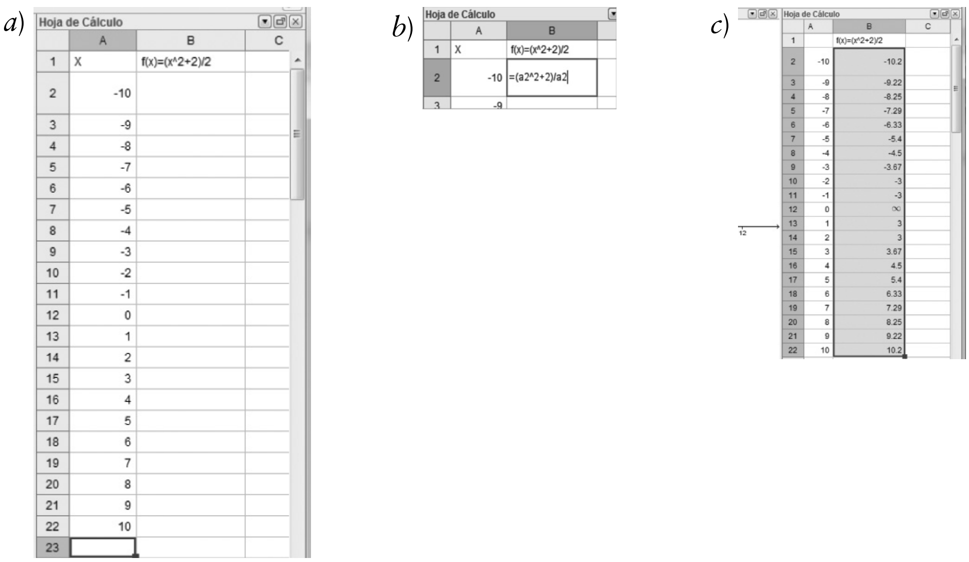


Figura 2.11 La imagen *a*) muestra los valores a sustituir en la función; la imagen *b*) señala la función y la imagen *c*) presenta los valores obtenidos.

- Selecciona los datos en ambas columnas y crea la Lista de datos (figura 2.12a) para que se representen en el plano (figura 2.12b).

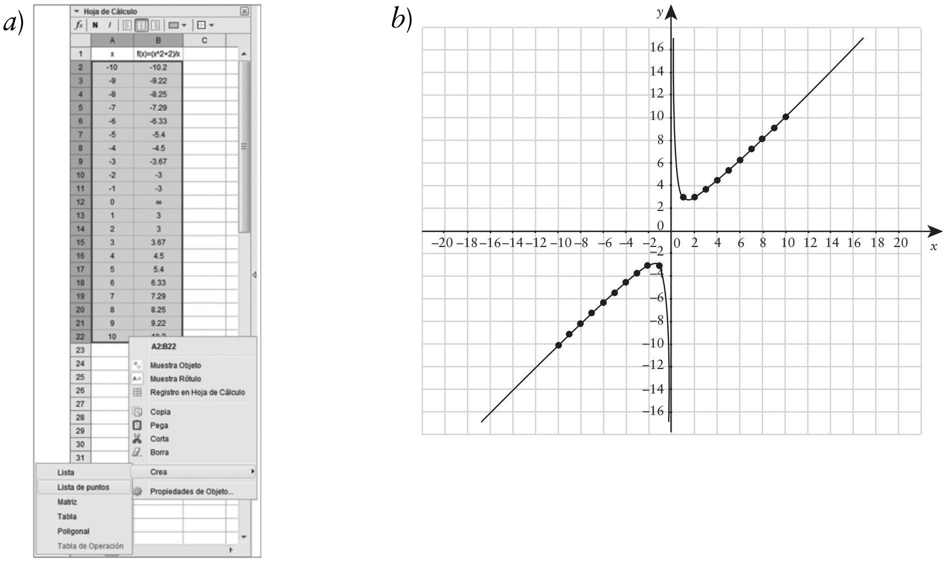


Figura 2.12 La imagen *a*) muestra la lista de datos y la imagen *b*) muestra la gráfica de dichos datos.

Con una tabla de valores en la hoja de cálculo

Anteriormente se utilizaron las tablas de valores en la hoja de cálculo del GeoGebra, en articulación con sus fórmulas y sus gráficas. Ahora se trabajarán sólo las tablas para mostrar cómo es que a partir de ellas, se puede analizar la relación de dependencia entre la variable x y las funciones, así como los comportamientos de éstas. Con el botón ☒ cierra la Vista Gráfica para que se extienda la hoja de cálculo.

- Introduce, en la Fila 1, las etiquetas para x, $f(x) = x$, $g(x) = x^2$, $h(x) = x^3$, $i(x) = x - 5^2$ y $j(x) = x(x - 5)$. Recuerda que debes introducir la instrucción como: **=”texto para la etiqueta”** (figura 2.13).

Hoja de Cálculo

fx N I

	A	B	C	D	E	F
1	x	f(x)=x	g(x)=x^2	h(x)=x^3	i(x)=x-5	j(x)=x(x-5)

Figura 2.13 Etiquetas para funciones.

- Asigna a las celdas de la columna A los valores que va a tomar la variable x.
- Para definir los valores de las funciones introduce en las celdas B2 (para la función f), C2 (para la función g), D2 (para la función h), E2 (para la función i) y F2 (para la función j) las fórmulas de cada una tomando A2 como el valor de la variable independiente (ejemplo en la figura 2.14a).
- Extiende el valor de cada una de las celdas de la Fila 2 para hacer el llenado de la tabla (figura 2.14b).

a)

Hoja de Cálculo

	A	B	C	D	E	F
1	x	f(x)=x	g(x)=x^2	h(x)=x^3	i(x)=x-5	j(x)=x(x-5)
2	-5	-5	=A2^2			
3	-4					
4	-3					
5	-2					
6	-1					
7	0					
8	1					
9	2					
10	3					
11	4					
12	5					

b)

Hoja de Cálculo

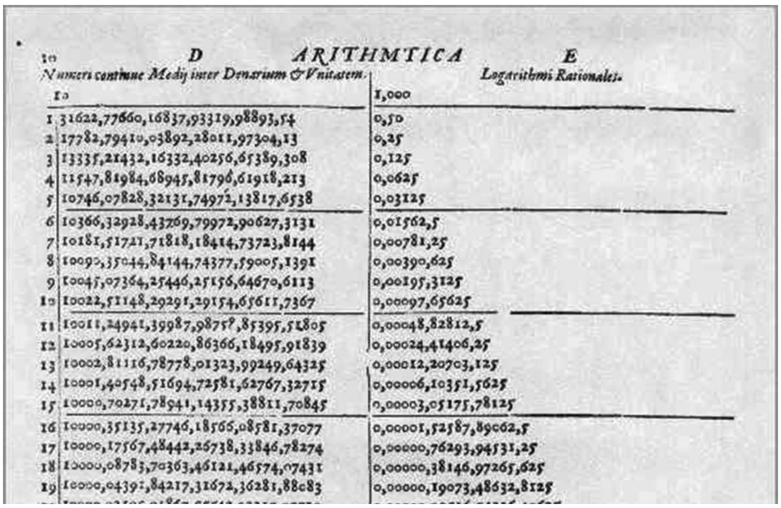
	A	B	C	D	E	F
1	x	f(x)=x	g(x)=x^2	h(x)=x^3	i(x)=x-5	j(x)=x(x-5)
2	-5	-5	25	-125	-10	50
3	-4	-4	16	-64	-9	36
4	-3	-3	9	-27	-8	24
5	-2	-2	4	-8	-7	14
6	-1	-1	1	-1	-6	6
7	0	0	0	0	-5	0
8	1	1	1	1	-4	-4
9	2	2	4	8	-3	-6
10	3	3	9	27	-2	-6
11	4	4	16	64	-1	-4
12	5	5	25	125	0	0

Figura 2.14 La imagen ***a***) muestra la forma de introducir las diversas funciones y la imagen ***b***) presenta los valores a cada función.

Entonces, por ejemplo, para el valor de $x = 2$ (celda A9) tenemos los correspondientes valores de las funciones $f(2) = 2$ (celda B9), $g(2) = 4$ (celda C9), $h(2) = 8$ (celda D9), $i(2) = -3$ (celda E9), $j(2) = -6$ (celda F9).

De forma evidente se observa que se puede hacer el cálculo fuera del programa y colocar el valor resultante en la celda correspondiente, lo anterior es una ventaja de contar con la tecnología. Lo interesante, a partir de tener la tabla con los valores, es analizar, que los valores de una función son operaciones sobre otra función.

La elaboración y lectura sobre tablas numéricas fue, quizá, la forma de trabajo con relaciones funcionales más usada en la antigüedad (figura 2.15), al menos hasta el uso sistemático del lenguaje algebraico.


10 D *ARITHMTICA* E

Numeri continue Medij inter Denarium & Vnitatem.		*Logarithmi Rationales.*
	10	1,000
1	31622,77660,16837,93319,98893,54	0,50
2	17782,79410,03892,28011,97304,13	0,25
3	13335,21432,16332,40256,65389,308	0,125
4	11547,81984,68945,81796,61918,213	0,0625
5	10746,07828,32131,74972,13817,6538	0,03125
6	10366,32928,43769,79972,90627,3131	0,01562,5
7	10181,51721,71818,18414,73723,8144	0,00781,25
8	10090,35044,84144,74377,59005,1391	0,00390,625
9	10045,07364,25446,25156,64670,6113	0,00195,3125
10	10022,51148,29291,29154,65611,7367	0,00097,65625
11	10011,24941,39987,98758,85395,52805	0,00048,82812,5
12	10005,62312,60220,86366,18495,91839	0,00024,41406,25
13	10002,81116,78778,01323,99249,64325	0,00012,20703,125
14	10001,40548,51694,72581,62767,32715	0,00006,10351,5625
15	10000,70271,78941,14355,38811,70845	0,00003,05175,78125
16	10000,35135,27746,18565,08581,37077	0,00001,52587,89062,5
17	10000,17567,48442,26738,33846,78274	0,00000,76293,94531,25
18	10000,08783,70363,46121,46574,07431	0,00000,38146,97265,625
19	10000,04391,84217,31672,36281,88083	0,00000,19073,48632,8125

Figura 2.15 Original de los cálculos de las raíces cuadradas sucesivas del 10 y de sus logaritmos respectivos en la base 10 de Brigs (1624).

Fuente: Hairer y Wanner (1977).

Mediante trazo de una curva

La curva C, que vemos en la figura 2.16, permite asociar a cada valor de x entre 2 y 8, el número $y = f(x)$. De este modo se tiene a la función definida sobre el intervalo [2, 8].

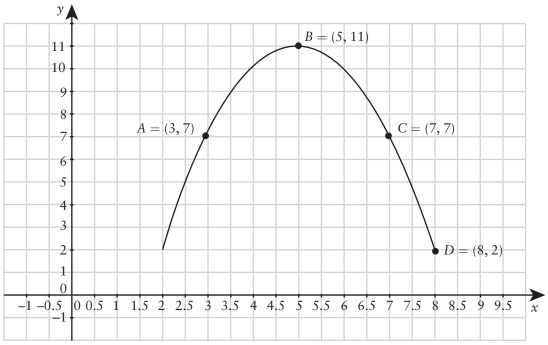


Figura 2.16 Representación gráfica de $y = f(x)$.

En tal caso se tiene, que: $f(3) = 7$; $f(5) = 11$; $f(7) = f(3)$ pues tienen la misma imagen; $f(8) = 2$. Con estos valores se conforman los pares ordenados (3, 7), (5, 11), (7, 7), (8, 2), cuyas representaciones gráfica serán los puntos sobre la curva que se muestran en la figura 2.16.

Otros ejemplos se muestran en la figura 2.17:

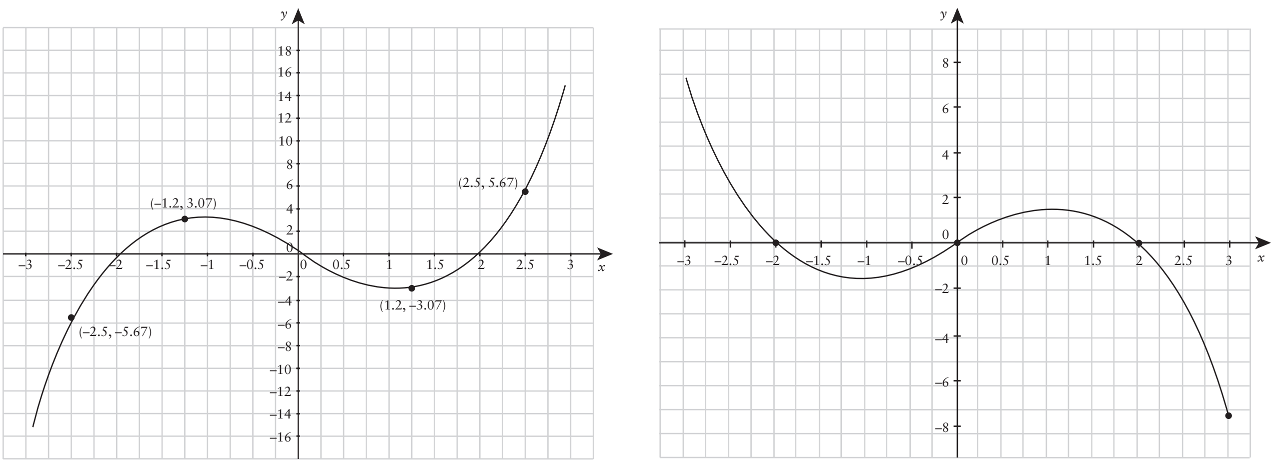


Figura 2.17 Ejemplos del trazo de diversas funciones (continúa).

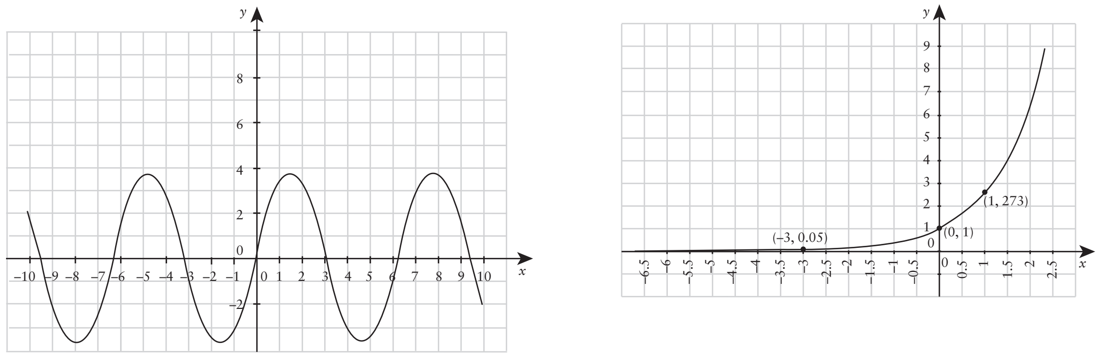


Figura 2.17 Ejemplos del trazo de diversas funciones (continuación).

Por una relación de dependencia

Es usual encontrar relaciones de dependencia en diferentes campos del conocimiento. Por ejemplo, en geometría, en las ciencias naturales y sociales, así como en diversos campos de la tecnología. Veamos algunos ejemplos:

- En un lugar determinado de la superficie terrestre, la temperatura está en función de la altitud.
- El área de un círculo está en función de su radio: $A(r) = \pi r^2$.
- El precio de un producto está en función de la demanda.

Mediante correspondencias arbitrarias

Una función es una colección de pares de números con la siguiente propiedad. Si (a, b) y (a, c) pertenecen a la colección, entonces, $b = c$. La correspondencia entre variables o entre elementos de un conjunto, puede establecerse en términos de elecciones arbitrarias. Por ejemplo, podemos tener una función construida de la siguiente forma: coloquemos una cuerda sobre una mesa, fijemos sus extremos con un clavo, algo así como la cuerda de una guitarra moviéndose sobre un solo plano.

Se debe hacer vibrar, y a los diez segundos detenemos hipotéticamente su vibración (figura 2.18). Cada punto del intervalo $[a, b]$ tendrá asociado el valor correspondiente a la ordenada de la curva en ese instante. Ese fenómeno determina una función real de variable real.

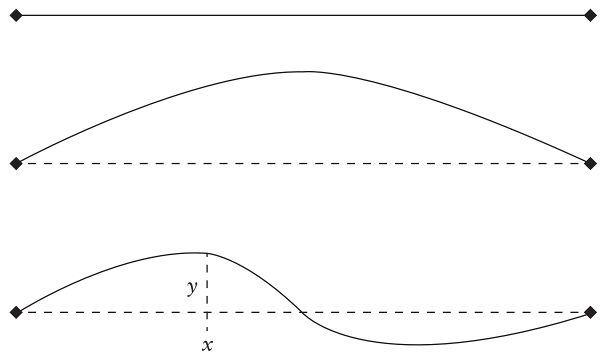


Figura 2.18 Representación gráfica de la vibración en una cuerda.

Otros ejemplos del mismo tipo pueden encontrarse en la teoría de las probabilidades o en las ciencias experimentales, del mismo modo que en matemáticas podemos decir, "sea *f* una función creciente", esto, no sé de cuál función en particular se está hablando, pero en cambio sé cuál es la propiedad que cumple. Esta generalización del concepto de función tuvo lugar a lo largo de los siglos, gracias a los procesos de matematización de la ciencia como a la propia extensión del aparato teórico y de sus fundamentos en matemáticas. Por ejemplo, las siguientes funciones no tienen una forma típicamente escolar del bachillerato, pero son, legítimamente funciones matemáticas.

- $f(x)=\begin{cases}1 & x\in I\\ 0 & x\in Q\end{cases}$, función propuesta por Dirichlet (1829).
- $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(n^2x)}{n^2}$, función propuesta por Weierstrass (1872).
- $f(x)=\begin{cases}x\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$, función propuesta por Cauchy (1821).
- $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\arctan(nx)=\begin{cases}\frac{\pi}{2} & x>0\\ 0 & x=0\\ \frac{-\pi}{2} & x<0\end{cases}$

2.3 Representación gráfica de la función

Definición

Sea f una función definida sobre A. Cuando la variable x recorre el intervalo A, el conjunto de todos los puntos M de coordenadas $(x, f(x))$ constituye la representación gráfica de la función f, o también llamada la curva representativa C_f de f. Sintéticamente se puede llamar, la gráfica de f, y la simbolizamos como G_f. Ahora bien, sí $M(x, y)$ es un punto de C_f esto significa que x pertenece al conjunto A y que la y es la imagen de x bajo f, es decir, está dada por la expresión $y = f(x)$.

Consideremos f definida sobre $[-1, 3]$ por $f(x) = x - x^2$. A partir de los valores de la tabla 2.1 podemos inferir el aspecto de su curva representativa:

Tabla 2.1 Valores asignados a $y = f(x)$

x	-1	-0.5	0	0.5	1	2	3
$f(x)$	-2	-0.75	0	0.25	0	-2	-6

La tabla 2.1 permite colocar los siete puntos correspondientes de la curva representativa C_f como se muestra en la figura 2.19:

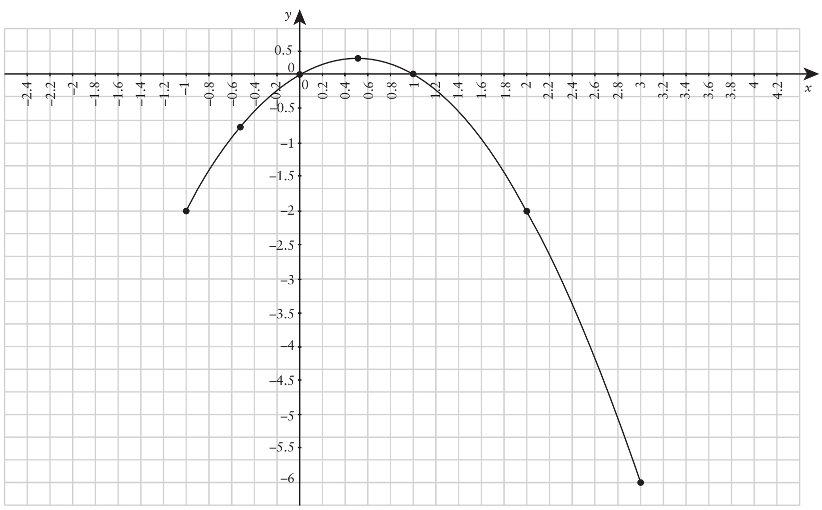


Figura 2.19 Gráfica de $f(x) = x - x^2$.

El trazo puede ser obtenido a mano completando los espacios entre puntos mediante una curva lisa o suave (se entiende como una curva sin picos).

¿Cómo saber si el punto $M(1.5, -0.75)$ pertenece a la curva C_f? Directamente, se calcula en la expresión $f(x) = x - x^2$ el valor que toma $f(1.5) = 1.5 - (1.5)^2 = -0.75$. En consecuencia el punto M pertenece a la curva C_f.

En el caso de que un punto, digamos el $N(2, 3)$, no satisfaga la expresión $f(x) = x - x^2$ indica que no está sobre la curva C_f. Efectivamente, en este caso $f(2) = 2 - 2^2 = -2 \neq 3$, así que la respuesta es que el punto N no pertenece a la curva.

2.4 Algunas nociones de utilidad

Sentido de variación

Cuando la curva C_f en el sentido en el que x crece, *sube*, decimos que la función es creciente; y cuando *baja*, decimos que la función es decreciente. Por ejemplo, la función dada por $f(x) = -x^2 + 1$ está definida entre -1 y 1. Este crecimiento de f sobre $[-1, 0]$ traduce el hecho de que, en $[-1, 0]$, si x aumenta, entonces $f(x)$ aumenta, es decir, se $x \leq x'$, luego pasa que $f(x)$ por una aumento $f(x')$, y luego $f(x) \leq f(x')$. Después del cero, en cambio, cuando x crece, la f decrece (figura 2.20).

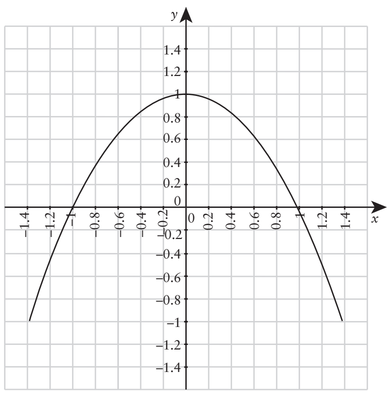


Figura 2.20 Gráfica de $f(x) = -x^2 + 1$.

Crecimiento

Sea f una función definida sobre un intervalo I:

- Se dice que f es *creciente* sobre I cuando, para todos los valores reales x y x' de I que cumplen con $x \leq x'$, se tiene que $f(x) \leq f(x')$.
- Se dice que f es *decreciente* sobre I cuando, para todos los valores reales x y x' de I que cumplen con $x \leq x'$, se tiene que $f(x) \geq f(x')$.

- Se dice que f es *constante* sobre I cuando, para todos los valores reales x y x' de I que cumplen con $x \leq x'$, se tiene que $f(x) = f(x')$.

Estudiar el sentido de variación de una función, es precisar los intervalos donde ella es creciente, aquellos donde ella es decreciente y donde es constante. Estos resultados pueden ser resumidos de la siguiente forma:

- Variaciones de $f:(0,\infty) \to \mathbb{R}$, dada por la fórmula $x \mapsto f(x) = \dfrac{1}{x}$.
- Como sabemos si $0 < x \leq x'$, entonces . De ahí que $f(x') \leq f(x)$, entonces la función f es decreciente sobre $(0, \infty)$.
- Variaciones de la función dada por la regla $f(x) = x^3 + 1$ definida en el intervalo $(-\infty, \infty)$. Sean x y x' números reales, es decir, $x, x' \in \mathbb{R}$, tales que $x \leq x'$, entonces $x^3 \leq x'^3$. De modo que la función es creciente en todo $=(-\infty, \infty)$.

Extremos de una función

Sea f una función definida sobre un intervalo I.

- Se dice que f tiene un valor *máximo* sobre I si existe una $x_0 \in I$ tal que $f(x_0) \geq f(x)$ para todo $x \in I$.
- Se dice que f tiene un valor *mínimo* sobre I si existe una $x_0 \in I$ tal que $f(x_0) \leq f(x)$ para todo $x \in I$.

Como estos, hay otros puntos llamados *singulares* que se comportan como máximo o mínimo, en una localidad como se muestra en la figura 2.21.

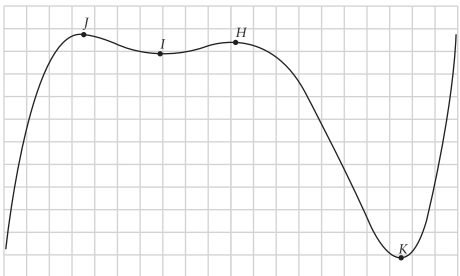


Figura 2.21 Representación gráfica de puntos singulares.

En la gráfica, el punto J representa el (valor) máximo de la función y el punto H un máximo local, el punto K es el (valor) mínimo de la función y el punto I es un mínimo local.

Paridad

Estudiar la paridad de una función f, significa precisar si f es par o impar, o bien no tiene paridad.

- Una función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función *par* si para $x \in \mathbb{R}$, se cumple que $f(-x) = f(x)$.
- Una función$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función *impar* si para $x \in \mathbb{R}$, se cumple que $f(-x) = -f(x)$.

Con algunos valores aproximados verifica las igualdades para comprobar que las funciones, en las gráficas siguientes, sean impares (figura 2.22) o pares (figura 2.23):

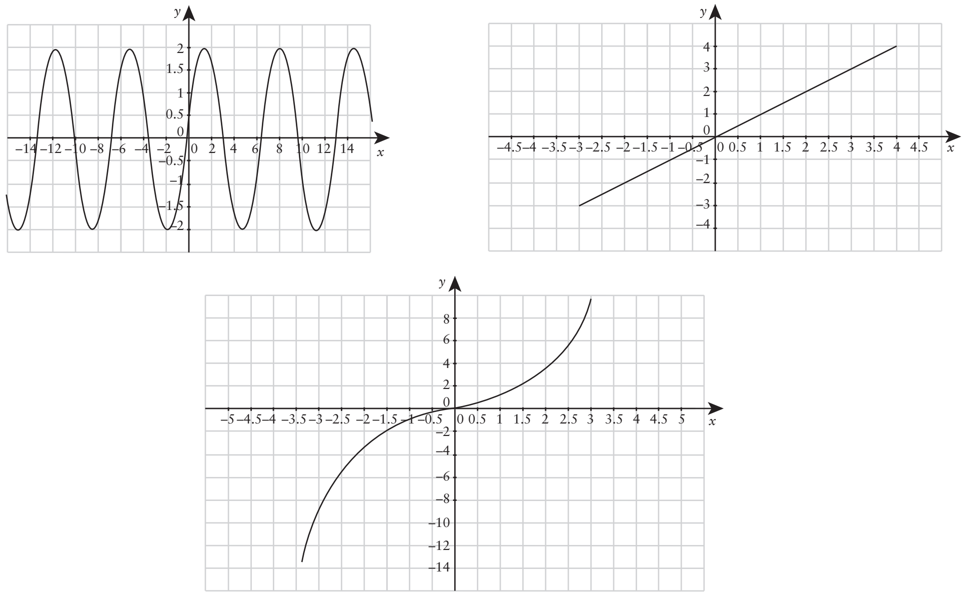


Figura 2.23 Representación gráfica de funciones pares.

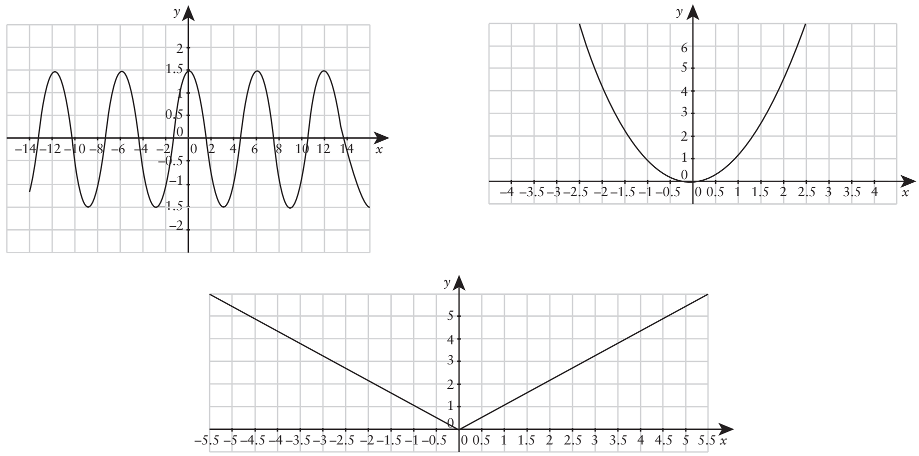


Figura 2.23 Representación gráfica de funciones pares.

2.5 Actividades matemáticas de exploración

Actividad 1

La función f asociada al número real x, está dada por la fórmula $f(x) = (x - 3)^2 + 2$.

a) Calcula $f(0)$ $f(3)$, $f(-3)$, $f\left(\frac{11}{5}\right)$ y $f\left(\sqrt{3}\right)$.

b) ¿Cuál es la imagen de 1, de 1.2 y de $-\frac{1}{3}$?

c) Encuentra dos valores distintos de x que tengan la misma imagen.

Actividad 2

Encuentra el dominio de definición de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 2 - \frac{1}{x}$

b) $g(x) = \frac{8}{x-3}$

c) $h(x) = \frac{(x+3)}{2x+1}$

d) $i(x) = 2 + \sqrt{x}$

e) $j(x) = \sqrt{x+1}$

f) $k(x) = \sqrt{4-x}$

g) $l(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

Actividad 3. Relaciones de dependencia

1. En electricidad. En un circuito, la resistencia R es equivalente a las dos resistencias r_1 y r_2 puestas en paralelo, en ese caso se cumple la relación siguiente: $\frac{1}{R} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$

   a) Expresa R en función de r_1 y r_2.

   b) Expresar r_1 en función de R y de r_2.

2. En termodinámica. La presión P de un gas en un volumen constante V_0, está en función de su temperatura T, y se expresa por la relación: $T = PV_0$

a) Expresa la presión P en función de la temperatura T y del volumen V.

b) Expresa el volumen V en función de la presión P y la temperatura T.

3. En física. En la superficie de los océanos, la presión media es aquella que posee normalmente la atmósfera $\left(1.033\,\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}\right)$, se sabe que la presión aumenta con la profundidad a una razón de $1\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ por cada 10m.

- ¿Cuál es la presión a una profundidad de 6000 metros?
- Define, mediante una fórmula explícita, la presión como una función de la profundidad.

4. En geometría. Al observar la figura 2.24, se tiene que $A(2, 1)$ y $M(x, 0)$. Si se denota por $f(x)$ a la pendiente de la recta AM:

   a) Determina los valores de $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$ y $f(3)$.

   b) ¿Cuál es el dominio de la función f?

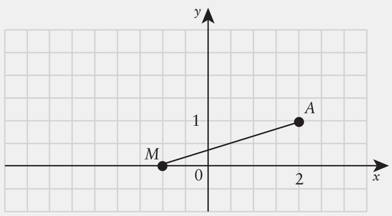


Figura 2.24 Recta del punto *A* al punto *M*.

Actividad 4

En GeoGebra, redacta las instrucciones para graficar las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{3x+1}{x^2-9}$

b) $g(x) = \sqrt{x} - \dfrac{1}{x}$

Actividad 5

Explorando la función $2x - x^3$:

a) Ingresa en la "línea de edición" la expresión $f(x) = 2x - x$^3 y pulsa Enter para trazar la gráfica (figura 2.25).

b) Elige la herramienta "Punto en objeto"  y toca la gráfica para colocar ahí el punto.

c) Elige la herramienta "Elige y mueve"  y mueve el punto recién creado por toda la gráfica.

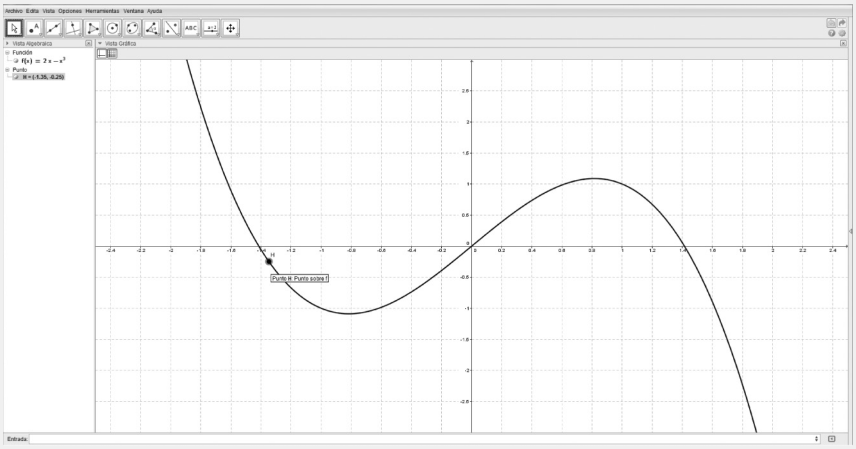


Figura 2.25 Representación gráfica de $f(x) = 2x - x^3$.

En la "Vista Algebraica" se puede ver la coordenada en la que se encuentra el punto cada vez que lo mueves. Viajando por la gráfica localiza:

- Las zonas de la gráfica donde la función es creciente o decreciente y establece los intervalos.
- La coordenada donde se encuentra el valor máximo o mínimo de la función.

Actividad 6

La curva de la figura 2.26 representa la trayectoria de un proyectil. Para cada valor de x en metros, $0 \leq x \leq 40$, $a(x)$ es la altura correspondiente en metros.

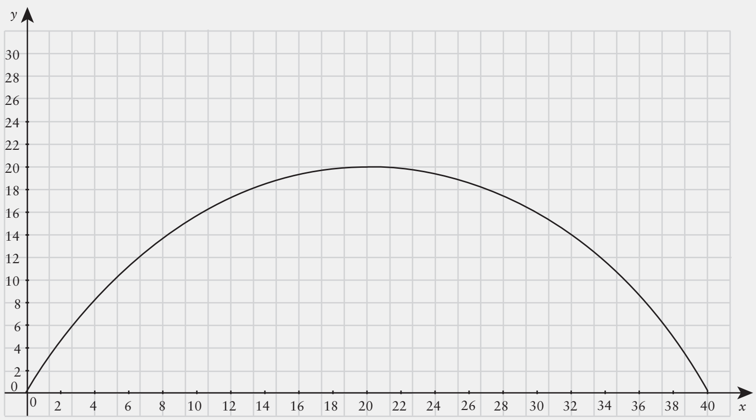


Figura 2.26 Representación gráfica de la trayectoria de un proyectil.

a) Analiza la información gráfica.

b) Indica cuál es el dominio de $a(x)$.

c) Cuáles son los valores $a(0)$, $a(10)$, $a(20)$, $a(30)$, $a(40)$.

Actividad 7

La curva de la figura 2.26 es la representación gráfica de una función $f(x)$.

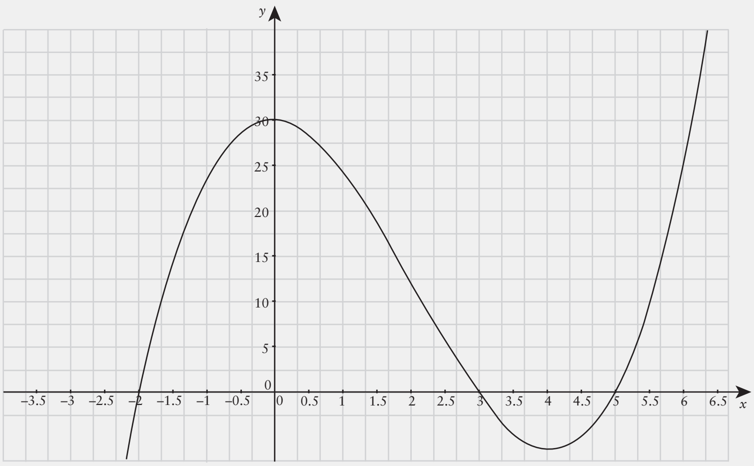


Figura 2.26 Representación gráfica de una función $f(x)$.

a) ¿Sobre qué intervalo está f definida?

b) Aproxima el valor de las imágenes de f cuando x toma los siguientes valores: -1; -0.5; 1; 1.9; 2, 5.

Actividad 8

Sea C_f la curva representativa de la función que asigna a cada real x el real $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$.

a) ¿Cuál es el dominio de definición de f?

b) ¿Cuáles, de entre los puntos siguientes, pertenecen a C_f? $A(0, 0)$, $B(2, 4)$, $C(1, 0)$, $D(1/2, 1/3)$.

c) ¿Cuál es la abscisa del punto de ordenada 3? ¿Cuál es la abscisa del punto de ordenada 100?

Actividad 9

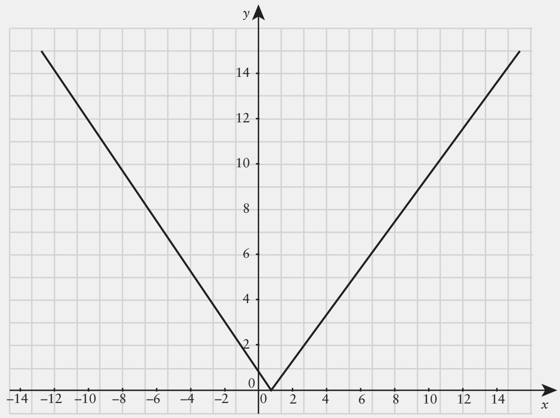
Considera las cuatro funciones siguientes:

- $f(x) = 1 + x + x^2$

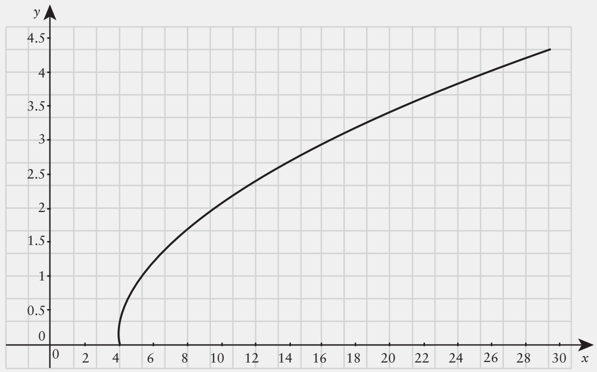
- $f(x) = |x - 1| + 1$
- $h(x) = \sqrt{x - 4}$
- $k(x) = abs(x - 1)$

a) Determina las imágenes de 0 y 1 para cada función.

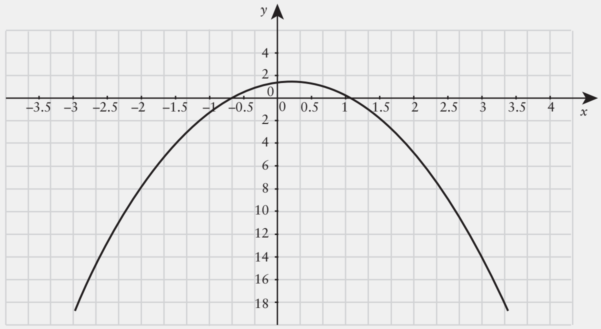
b) Asocia las expresiones con su curva representativa.



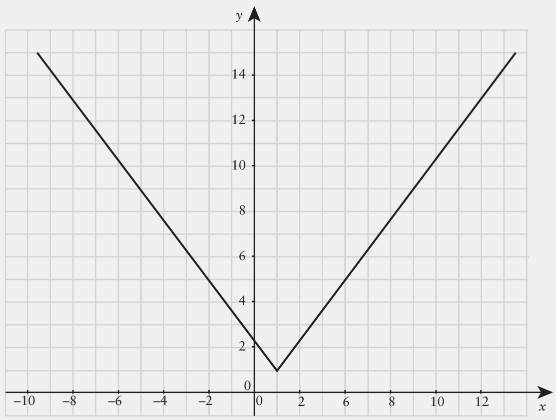
Función:



Función:



Función:



Función:

Actividad 10

Indica si las siguientes relaciones son verdaderas o falsas:

a) La población mundial es una función creciente del tiempo.

b) En un balón, la presión es una función decreciente del volumen.

c) Para un rectángulo de área 10 cm^2, el ancho es una función decreciente del largo.

d) Cuando un vehículo frena, la distancia de frenaje es una función creciente de la velocidad.

Actividad 11

La siguiente tabla representa la variación de una función *f*:

x	-5		-3		2		4
$f(x)$	6	↘	1	↗	4	↘	0

a) Traza tres posibles gráficas diferentes de *f* que cumplan con ella.

Actividad 12

Determina el sentido de variación de:

a) $f(x) = \sqrt{x}$ en $[0, +\infty)$

b) $f(x) = x^2 + 1$ sobre $[0, +\infty)$ y luego sobre $(-\infty, 0]$

c) $f(x) = 1 + \dfrac{4}{x}$ sobre $[0, +\infty)$ y luego sobre $(-\infty, 0]$

Actividad 13

En el plano *xy*, se tienen los puntos $A(2, 1)$ y $M(x, 0)$. Diseña la tabla de variaciones de las funciones siguientes a partir de $[-5, 5]$.

a) $l(x)$ = longitud de AM

b) $a(x)$ = área del triángulo OAM

c) $p(x)$ = pendiente de la recta AM

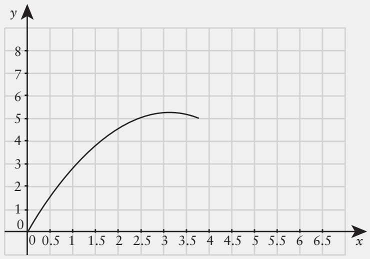
Actividad 14

Las siguientes figuras muestran una parte de la curva representativa de una función *f* definida en $\mathbb{R}$. Completa el trazo suponiendo que:

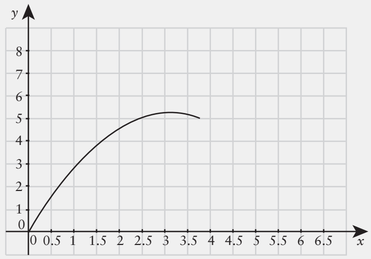
a) *f* es par.

b) *f* es impar.

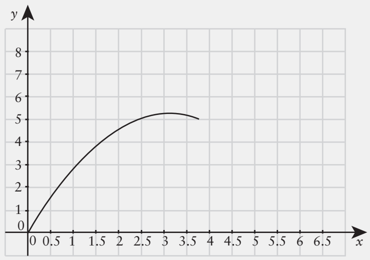
c) *f* no es par ni impar.



Función par



Función impar



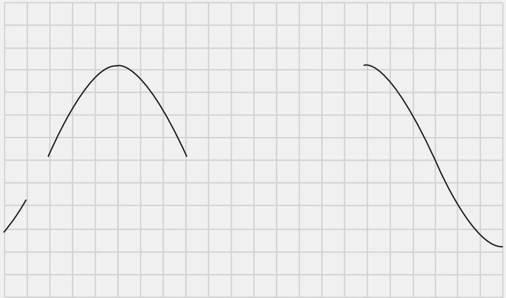
Función sin paridad

Actividad 15

La siguiente figura representa parcialmente la gráfica de una función f definida en $[-4, 4]$, determina si:

a) La función f puede ser impar.

b) Completa el trazo suponiendo que es par.



Actividad 16

Explora la paridad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^3 + 2$,

b) $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$,

c) $f(x) = x^2 - x$,

d) $f(x) = (x - 3)^2 + 3x$

e) $f(x) = -\dfrac{7}{x}$,

f) $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$,

g) $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$.

h) $f(x) = (x+2)^2$,

i) $f(x) = (x + 3)^2 - (x - 3)^2$.

Actividad 17

Estudia la paridad de la función distancia $D(x)$, la cual representa a la longitud del segmento AB que une los puntos $A(0, 2)$ y $B(x, 0)$ en el plano cartesiano.

Actividad 18

Considera la función *f* definida en $[-3.5, 6]$, su representación gráfica es:

a) Construye la tabla de variaciones de *f*, después determina el valor máximo y mínimo.

Actividad 19

La función dada por la relación $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ admite sobre el intervalo $(0, +\infty)$, ¿un máximo? ¿Un mínimo?

Actividad 20

Considera a la función *f* definida mediante la fórmula $f(x) = (x + 2)^2 + 3$, y

a) Muestra que, para todo x, $f(x) \geq 3$.

b) Determina los valores de x tales que $f(x) = 3$.

c) Deduce si *f* admite el valor 3 como mínimo sobre $\mathbb{R}$, y que ese mínimo se alcanza en -2.

d) Con el método empleado anteriormente, muestra que cada una de las funciones siguientes admite un mínimo y sobre $\mathbb{R}$ y precisa los puntos donde este mínimo es alcanzado:

- $x \mapsto x\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{2}{3}$
- $x \mapsto |x-1|+2$
- $x \mapsto \sqrt{x-3}$.

Actividad 21 Manipulando ventanas en GeoGebra

1. Considera una ventana en GeoGebra dada por [−5, 5] y [−3, 3], esto es que los valores de x están entre −5 y 5, mientras que los de y están entre −3 y 3. Más específicamente, $-5 \leq x \leq 5$ y $-3 \leq y \leq 3$. ¿Cuáles de los siguientes puntos están en la ventana de visualización?: (−6, 2); (5, 5), (3, 5), (−2, 2), (0, 0), (125, 34), (−10/2, 9/3).

2. Grafica la función $y = x^2$, en distintas ventanas de GeoGebra:

   a) [−0.5, 0.5] y [−0.5, 0.5];

   b) [−1, 1] y [−1, 1];

   c) [−2, 2] y [−2, 2];

   d) [−10, 10] y [−5, 5];

   e) [0, 3] y [0, 9];

   f) [1, 1] y [2, 4];

   g) [2, 2] y [3, 3].

3. Elige una ventana en la que no se vea la gráfica de la función $y = x^3$.

Capítulo 3

MÉTODO DE LA TABULACIÓN

Introducción

A lo largo de su historia, los seres humanos han generado una cantidad impresionante de información y una de sus tareas principales ha sido organizarla. Se puede observar cómo diversas ramas científicas se han encargado de mantener un orden, principalmente a través de los textos. Hoy, gracias a la tecnología de la información podemos organizar y almacenar una gran cantidad de ella mediante archivos y, asimismo, acceder a los detalles de manera inmediata. Pero la finalidad de este trabajo es la de analizar dicha información para poder utilizarla en otras tareas, por ejemplo en la predicción de fenómenos.

En matemáticas la tabulación es una forma humana de organizar la información. Nuestra tarea entonces será la de analizar, entender y utilizar en otros contextos, tanto matemáticos como sociales, dicha información.

El primer acercamiento significativo de los estudiantes al concepto de función es, sin duda, mediante la elaboración de tablas. El método de tabulación es una poderosa herramienta para la elaboración de conjeturas y principalmente para el bosquejo de formas gráficas que sintetizan la información. Una tabla que muestre los valores de la variable independiente x y de la variable dependiente y, puede darnos razón del comportamiento de una función, o bosquejo de su gráfica. Por ejemplo, si se estudia la tabla de la figura 3.1, se observa que los puntos obtenidos se representan en el plano de coordenadas y en la gráfica de la función, en el intervalo $-2 \leq x \leq 2$:

x	y
-2	-3
-1	0
0	-1
1	0
2	9

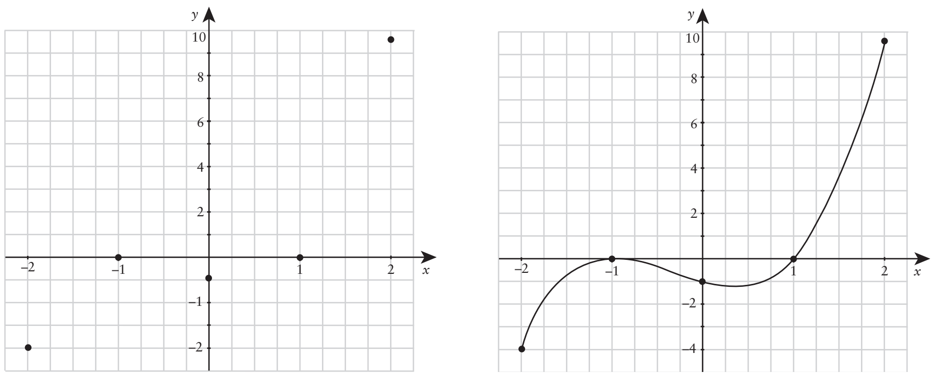


Figura 3.1 Representación gráfica de los puntos obtenidos en una tabla para una función cualquiera.

Sin embargo, como muchas herramientas, la tabulación tiene sus limitantes. ¿Qué pasa si para la función anterior el alumno sólo hace una tabla con valores de x positivos mayores que cero?, en muchos casos somos los profesores quienes definimos la tabla, de tal manera que se orilla al alumno a aceptar algo, y no a explorar sobre sus conjeturas. Además, se ha hecho rutinario el paso de una tabla a una gráfica, pero ¿qué se puede analizar en una tabla

para que brinde una idea de cómo se comporta la gráfica de la función antes de graficarla? Analicemos el caso anterior con el siguiente ejemplo.

Si exploramos con valores de x menores de –2, la función decrece infinitamente.

Si exploramos con valores de x mayores a 2, la función crece infinitamente.

x	y
–2	–3
–1	0
0	–1
1	0
2	9

Existe un ***cero*** entre dos valores negativos. Lo cual supone que la gráfica de la función no cambia de cuadrante en esta zona.

Existe un ***cero*** entre un valor negativo y uno positivo. Lo cual supone que la gráfica de la función cruza el eje x y pasa del cuarto al primer cuadrante en esta zona.

Si se hace una exploración alrededor de (–1, 0) se debe observar que antes del punto la función es creciente y después de él es decreciente. Al explorar alrededor de (1, 0), se observa que la función es creciente antes y después del punto. Si la función es decreciente después de (–1, 0) y creciente antes de (1, 0) significa que hay un extremo de la función en el intervalo (–1, 1).

3.1 La recta

La exploración numérica es una herramienta básica entre los estudiantes, es quizá su estrategia más confiable al abordar problemas nuevos. Por esta razón el tratamiento de tablas constituye una fase importante en el desarrollo del concepto de función. El objetivo es dotar de significado a estas tablas, comenzando por explorar las funciones lineales mediante las tablas que se muestran en la figura 3.2.

x	Y_1
–3	–3
–2	–2
–1	–1
0	0
1	1
2	2
3	3

x	Y_2
–3	–12
–2	–8
–1	–4
0	0
1	4
2	8
3	12

x	Y_3
–3	–1.5
–2	–1
–1	–0.5
0	0
1	0.5
2	1
3	1.5

x	Y_4
–3	6
–2	4
–1	2
0	0
1	–2
2	–4
3	–6

x	Y_5
–3	–2
–2	–1
–1	0
0	1
1	2
2	3
3	4

x	Y_6
–3	–6
–2	–5
–1	–4
0	–3
1	–2
2	–1
3	0

Figura 3.2 Conjunto de tablas que dan valores para diversas funciones.

Los valores de la tabla 1 describen una función donde a cada valor de la variable independiente x, la variable dependiente "Y_1" toma el mismo valor. Dicho en otras palabras $Y_1 = x$, y la gráfica que representa esta correspondencia se muestra en la figura 3.3.

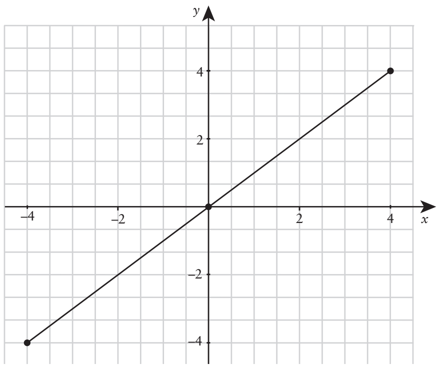


Figura 3.3 Representación gráfica $Y_1 = x$.

Ahora bien, ¿existe alguna relación entre los valores de Y_2 de la tabla 2 y los valores de Y_1 de la tabla 1? (observa que los valores para x son los mismos), si la relación existe ¿cuál es? En este caso, es necesario hacer exploraciones numéricas que permitan conjeturar sobre esta relación y llegar a los siguientes resultados:

- Los valores Y_2 son los valores de Y_1 multiplicados por 4. O dicho en su forma analítica: $Y_2 = 4$, entonces, $Y_1 = 4x$.
- Los valores de Y_3 de la tabla 3, son los valores de Y_1 multiplicados por 0.5, que en lenguaje analítico es, $Y_3 = 0.5$, entonces, $Y_1 = 0.5x$.
- Los valores de Y_4 de la tabla 4, son los valores de Y_1 multiplicados por –2, o dicho en su forma analítica, $Y_4 = -2$, entonces, $Y_1 = -2x$. (En este caso es necesario destacar el cambio de signo que provoca –2 en los valores de Y_2).
- Los valores de Y_5 de la tabla 5, son los valores de Y_1 más una unidad, que en lenguaje analítico es, $Y_5 = Y_1 + 1 = x + 1$.
- Los valores de Y_6 son los valores de Y_1 menos tres unidades, o dicho en su forma analítica, $Y_6 = Y_1 - 3 = x - 3$.

La base fundamental de este análisis es la exploración numérica que permita conjeturar sobre la forma de la función, aun cuando hasta ahora no quede claro el papel de los coeficientes de la función lineal $y = mx + b$.

Actividad 3.1

1. Ingresa al programa **GeoGebra** .

2. Cierra la vista gráfica con el botón .

3. Activa la "Hoja de cálculo" en el "Menú Vista". En la primera fila colocarás las etiquetas X, Y1, Y2, Y3, Y4, Y5 y Y6 (figura 3.4) en las celdas A1, B1, C1, D1, E1, F1, G1, respectivamente. Las columnas con etiqueta Y representarán las los valores de la variable dependiente, con relación al valor de la columna con etiqueta X. Así, a cada valor de cada columna A le corresponde un valor de las otras columnas B, C, D, E, F y G.

Hoja de Cálculo

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	X	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	="Y6"	
2								

Figura 3.4 Etiquetas en una hoja de cálculo en GeoGebra.

4. Introduce los datos de las tablas de la figura 3.2, recordando que la columna A tiene los valores de X para todas las funciones Y (figura 3.5).

Hoja de Cálculo

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	X	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Y6	
2	-3	-3	-12	-1.5	6	-2	-6	
3	-2	-2	-8	-1	4	-1	-5	
4	-1	-1	-4	-0.5	2	0	-4	
5	0	0	0	0	0	1	-3	
6	1	1	4	0.5	-2	2	-2	
7	2	2	8	1	-4	3	-1	
8	3	3	12	1.5	-6	4	0	
9								

Figura 3.5 Datos de las tablas de la figura 3.2 en una hoja de cálculo.

5. Vuelve a activar la vista gráfica. Con la herramienta centra el plano cartesiano en la visa gráfica y adecúa la ventana para que se vean todos los puntos de las tablas.

6. Selecciona los datos de las dos primeras columnas (X, Y1) y crea una lista de puntos. Para crear las listas de las otras columnas selecciona primero las celdas con los valores de X y luego, con la tecla "Ctrl." presionada, selecciona los valores de alguna columna de Y.

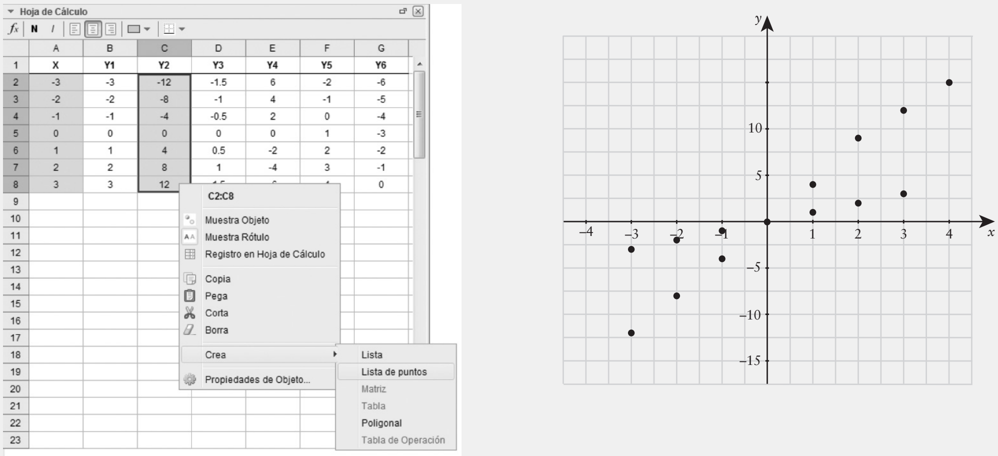


Figura 3.6 Datos en el plano cartesiano de las listas (X,Y1) y (X,Y2).

7. Con la herramienta  crea una recta que pase por dos puntos de la lista 1 y otra que pase por la lista 2. Si la recta pasa por el resto de los puntos de cada lista, entonces los puntos le corresponden a una misma *función lineal*.

8. En la "Vista Algebraica" se han generado las expresiones de ambas rectas, expresadas como ecuaciones de recta, además puedes ver las listas creadas y las coordenadas de los puntos generados en la vista gráfica (figura 3.7):

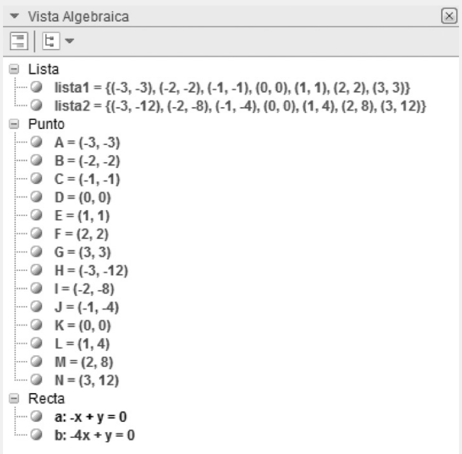


Figura 3.7 Expresiones algebraicas de las listas creadas en la hoja de cálculo en GeoGebra.

Las ecuaciones de las rectas:

$$-x + y = 0$$

$$-4x + y = 0$$

Pueden expresarse como las relaciones de dependencia:

$$y = x$$

$$y = 4x$$

Y con ello verificar que se trata de las funciones identificadas al final de la sección 3.1.

9. Desactiva los datos de la lista (X, Y2) y su ecuación, para evitar confusión en la Vista gráfica.

10. Genera las listas de datos de (X, Y3) y construye la ecuación que pase por dos de sus puntos. Verifica que la recta pase por todos los datos de su lista y que se trate de la función propuesta en la sección 3.1. Desactivando una vez que hayas verificado todo, genera las listas (X, Y4), (X, Y5) y (X, Y6) y construye sus gráficas correspondientes.

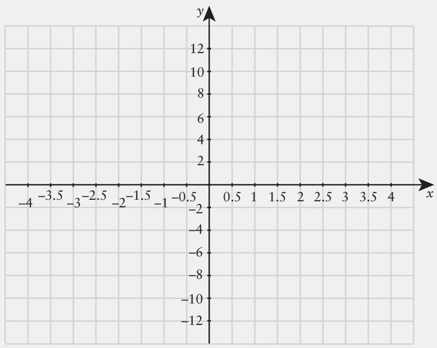
11. Bosqueja en el siguiente plano cartesiano las gráficas emplea distintos colores para diferenciarlas y responde:

    a) ¿Qué gráficas tienen dos mismos puntos?

    b) ¿Qué gráficas tienen un mismo punto?

    c) ¿Qué gráficas no tienen puntos en común?

    d) ¿Qué gráficas pasan por la coordenada (0, 0)?



Numérica y gráficamente es claro que dados, dos puntos, solamente una recta pasa por ellos (figura 3.8). Reforcemos nuestra conjetura con el siguiente análisis. Se sabe que la ecuación de una recta es:

$$(y - y_1) = m\,(x - x_1) \qquad (3.1)$$

Donde, m es la pendiente de la recta y es igual a:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad (3.2)$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta es:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \tag{3.3}$$

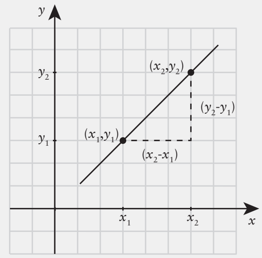


Figura 3.8 Representación gráfica de una función lineal.

Considerando entonces que son dos los puntos los que definen a la recta, implica que dos puntos pasan por una única recta. Ahora bien, en el bosquejo de la actividad 3.1 puedes observar distintas rectas, algunas que pasan por el origen pero que tienen distinta inclinación y una pendiente positiva; otras que no pasan por el origen pero cruzan el eje de las x en algún punto y hay una con pendiente negativa. Cruzar el eje de las x es una característica de todas las rectas, excepto en una ¿sabes cuál? Este cruce con el eje equivale a decir que $y = 0$, entonces pueden suceder dos cosas:

I. Que la recta comience por debajo del eje x, lo cruce y continúe por arriba de él (figura 3.9).

II. Que la recta comience por arriba del eje x, lo cruce y continúe por abajo de él (figura 3.10).

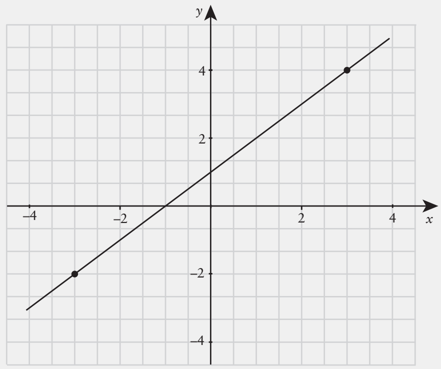


Figura 3.9 Recta con pendiente positiva.

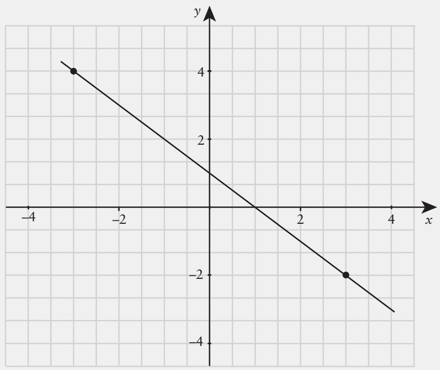


Figura 3.10 Recta con pendiente negativa.

Para el caso I (tenemos la recta que pasa por los puntos $(-3, -2)$ y $(3, 4)$ cuya pendiente, al hacer uso de la ecuación 3.2, es igual a 1, lo que significa que para este caso la pendiente es positiva y la recta es:

$$
\begin{aligned}
y - (-2) &= x - (-3) \\
y + 2 &= x + 3 \\
y &= x + 3 - 2 \\
y &= x + 1
\end{aligned}
$$

Para el caso II tenemos la recta que pasa por los puntos $(-3, 4)$ y $(3, -2)$ cuya pendiente, al hacer uso de la ecuación 3.2, es igual a -1, lo que significa que para este caso la pendiente es negativa y la recta es:

$$
\begin{aligned}
y - (4) &= -[x - (-3)] \\
y - 4 &= -[x + 3] \\
y - 4 &= -x - 3 \\
y &= -x - 3 + 4 \\
y &= -x + 1
\end{aligned}
$$

Si se analiza el caso I en la tabla, tenemos que:

x	y
-5	-4
-4	-3
-3	-2
-2	-1
-1	0
0	1
1	2
2	3
3	4

Cruce con el eje *x*

Por debajo del eje *x*

Por arriba del eje *x*

Actividad 3.2

1. Con papel y lápiz localiza los siguientes puntos en el plano de coordenadas y bosqueja la gráfica.

2. Propón una función que describa la tabla anterior. Comprueba tu conjetura en GeoGebra, haciendo una sucesión análoga a la actividad 3.1.

3. Usando los valores de la tabla anterior, elabora la tabla de una de las siguientes funciones: $Y_2 = 0.5Y_1$, $Y_3 = 3\,Y_2$, $Y_4 = Y_3 + 2$, $Y_5 = 2Y_4 - 1$. Construye para cada una, la lista de datos y una recta que pase por dos de sus puntos.

4. Deduce las fórmulas que dan origen a las siguientes tablas. Comprueba tus conjeturas en GeoGebra.

x	g_1
−3	4.5
−2	5
−1	5.5
0	6
1	6.5
2	7
3	7.5

x	g_2
−3	0.6
−2	0.9
−1	1.2
0	1.5
1	1.8
2	2.1
3	2.4

x	g_3
−5	10.5
−3	6.5
−1	2.5
0	0.5
1	−1.5
3	−5.5
5	−9.5

3.2 La parábola

La parábola es la representación gráfica de una función cuadrática. Tiene características muy específicas, que son más claras en sus gráficas. Partamos del caso más característico como se muestra en la siguiente tabla y la figura 3.11:

x	y
−3	9
−2	4
−1	1
0	0
1	1
2	4
3	9

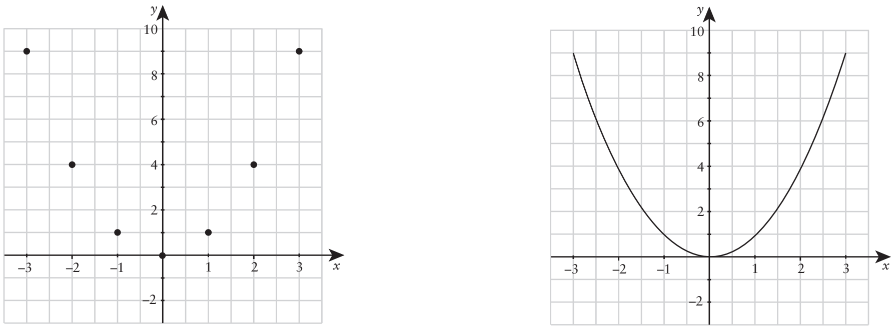


Figura 3.11 Representación gráfica de una función cuadrática.

En esta tabla se pueden observar las siguientes características:

- No importando el valor que tome x el valor de y siempre es positivo.
- El valor de y es igual para x y $-x$. Esto provoca que la gráfica sea simétrica respecto del eje y.
- $y = 0$ sólo cuando $x = 0$. Esto significa que la gráfica tocará tangencialmente al eje x en el punto $(0, 0)$.
- La función es decreciente en el intervalo $(-\infty, 0)$, es creciente en el intervalo $(0, \infty)$ y tiene una cota mínima en $y = 0$.

En este caso se trabaja numérica y gráficamente con la función $y = x^2$. Las características antes mencionadas son exclusivas de esta función y son claramente observables en su ecuación.

- $x^2 \geq 0$ y $x^2 > 0$ si $x \neq 0$
- $(-x)^2 = x^2$
- $y = x^2 = 0$ si y sólo si $x = 0$

En las parábolas podemos tener diversos casos, que obtienen al mover la gráfica de la función $y=x^2$ a través del plano cartesiano o reflejándola respecto del eje x, esto es:

- Parábolas que abren hacia arriba y:
  - § Cruzan el eje x. (figura 3.12)
  - § No cruzan el eje x. (figura 3.13)
  - § Tocan tangencialmente al eje x. (figura 3.14)
- Parábolas que abren hacia abajo y:
  - § Cruzan el eje x (figura 3.15)
  - § No cruzan el eje x (figura 3.16)
  - § Tocan tangencialmente al eje x (figura 3.17)

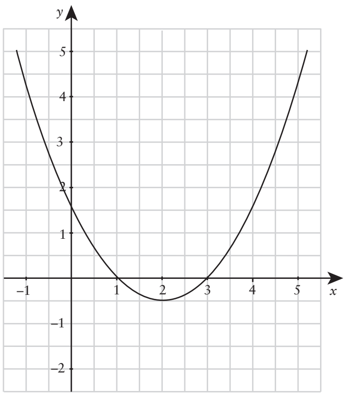


Figura 3.12 Parábola abierta hacia arriba con dos cruces en el eje *x*.

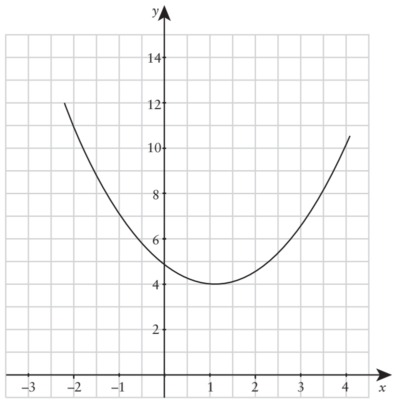


Figura 3.13 Parábola abierta hacia arriba sin cruces en el eje *x*.

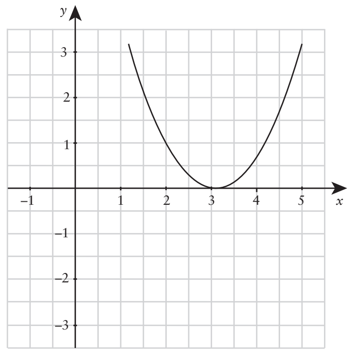


Figura 3.14 Parábola abierta hacia arriba con un toque tangencial en el eje *x*.

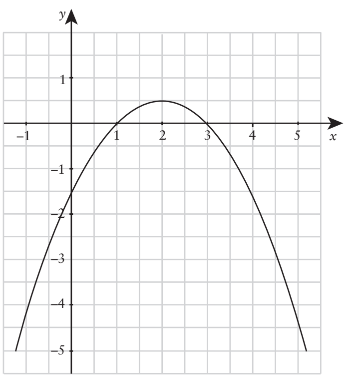


Figura 3.15 Parábola abierta hacia abajo con dos cruces en el eje *x*.

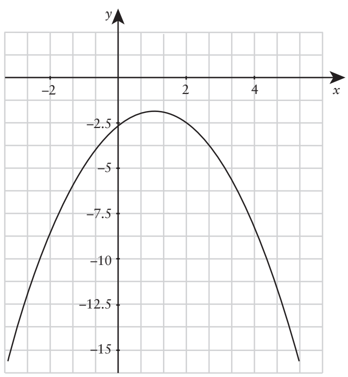


Figura 3.16 Parábola abierta hacia abajo sin cruces en el eje *x*.

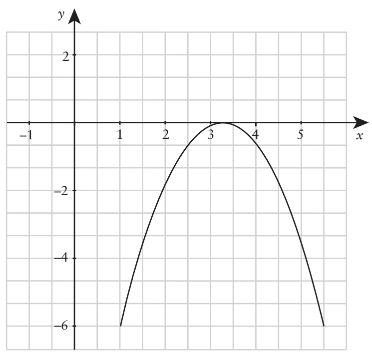


Figura 3.17 Parábola abierta hacia abajo con un toque tangencial en el eje *x*.

De aquí que en nuestras tablas observemos comportamientos (crecimientos y decrecimientos) diversos, un intervalo de decrecimiento, una cota inferior un intervalo de crecimiento para las parábolas que abren hacia arriba; y para las parábolas que abren hacia abajo tenemos un intervalo de crecimiento, una cota superior y un intervalo de decrecimiento. Es decir, la figura 3.12 sería el reflejo de una tabla cuyos valores de y cambiarán de positivos decrecientes a negativos decrecientes hasta llegar a un punto mínimo y convertirse en negativos crecientes que cambien a positivos crecientes (esto conforme x crece). Observa que justo el punto en el que cambia de ser positivo a ser negativo, o viceversa, y es igual a cero.

x	y
–3	36
–2	15
–1	8
0	3
1	0
2	–1
3	0
4	3
5	8
6	15

Valor negativo.

Valores positivos decrecientes.

Cruce con el eje x.

Valores positivos crecientes.

Actividad 3.3

1. Dadas las siguientes tablas:

   a) Identifica a qué caso pertenece cada una (figuras 3.12 a la 3.17), mediante un análisis numérico, como el anterior.

   b) Introduce los valores de las tablas en GeoGebra (de forma análoga a la actividad 3.1).

   c) Propón funciones cuadráticas que creas pasen por los puntos de cada una de las tablas, introdúcelas en el programa y observa que tanto te acercas.

X	Y_1
–6	16
–4	4
–2	0
1	9
3	25
7	81

Tabla 1

X	Y_2
–3	–7
–1	1
0	2
2	–2
3.5	–10.25
4.25	–16.0625

Tabla 2

X	Y_3
–2.5	–0.025
–1	–1
0	–4
1.5	–12.25
3	–25
5	–49

Tabla 3

X	Y_4
–3.5	–12.5
–2.5	–7
–1	–2.5
0	–2
1.25	–4.1875
2	–7

Tabla 4

X	Y_5
–0.5	30.25
0	25
2	9
4	1
7	4
8.5	12.25

Tabla 5

X	Y_6
–3	12
–1	0
0	–3
2	–3
4	5
6	21

Tabla 6

2. Dadas sus características, ¿por cuántos cuadrantes pasa una parábola?

3. Configura en GeoGebra una “Vista gráfica” con $-10 \leq x \leq 10$ y $-10 \leq y \leq 10$. Escribe función $y = (x - 5)^2 + 2$ en la línea de edición y pulsa Enter para que aparezca su gráfica.

a) ¿En cuántos cuadrantes se encuentra la parábola?

b) Cambia la "Vista gráfica" a $-30 \leq x \leq 30$ y $-5 \leq y \leq 60$. ¿En cuántos cuadrantes se encuentra la parábola?

4. Dados dos puntos, ¿cuántas parábolas pasan por ellos?

5. Introduce en GeoGebra las siguientes funciones. ¿Qué observas en cada grupo?

   Grupo 1. $f(x) = (x-3)^2 - 3$, $g(x) = -x^2 + 4$
   Grupo 2. $h(x) = x^2 + 4x - 2$, $i(x) - 0.3x^2 + 0.6x - 3.7$
   Grupo 3. $j(x) = (x-4)^2 + 3$, $k(x) = -(x-4)^2 + 5$, $l(x) = -3(x-4)^2 + 7$

6. ¿Cuántos puntos como mínimo definen una única parábola?

7. Grafica en GeoGebra las siguientes funciones:

   a) $f(x) = (x + 2)(x - 2)$
   b) $g(x) = -(x + 6)(x - 1)$
   c) $h(x) = (x + 2)(x + 2)$
   d) $j(x) = -(x - 3)(x - 6)$

8. Para cada función elabora su tabla de variación.

9. En cada gráfica, coloca un punto con la herramienta , y muévelo para:

   a) Localizar el valor máximo o mínimo de la curva y obtener su coordenada.
   b) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
   c) Localizar, si los hubiera, los puntos donde la curva corta el eje x y obtener las coordenadas.

3.3 La cúbica

Como ya observamos una recta cruza una vez al eje x provocando que haya un punto donde y sea igual a 0, la parábola puede cruzar al eje x provocando que en dos puntos y sea igual a 0 o puede no cruzarlo nunca, provocando que y nunca sea igual a 0. ¿Qué pasa ahora con la función cúbica (figura 3.18)? De nuevo, partamos de un caso clásico.

x	y
-3	-27
-2	-8
-1	1
0	0
1	1
2	8
3	27

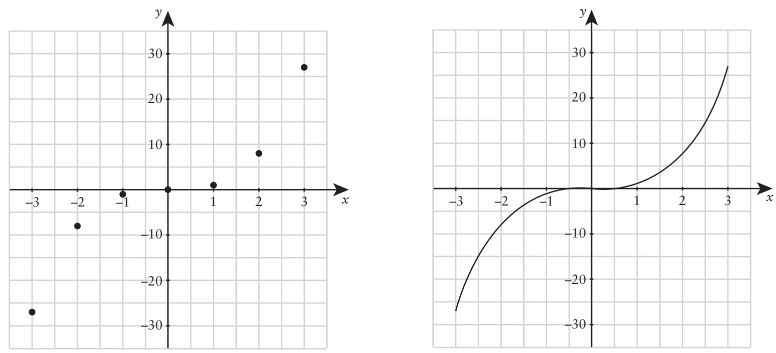


Figura 3.18 Representación gráfica de una función cúbica.

En este caso, se observa que la tabla de la figura 3.18 tiene valores negativos de y cuando x es negativa, $y = 0$ cuando $x = 0$ y valores positivos de y cuando x es positiva; justo igual que la tabla 1 de la actividad 3.1 que describía una recta. Sin embargo, la diferencia con esta tabla es la forma en la que crecen los valores de y, lo cual se refleja en la forma de la gráfica. Observemos ambas gráficas en la figura 3.19, en el intervalo $[-4, 4]$, en este caso tratamos con la función cúbica $y = x^3$ y la función lineal $y = x$.

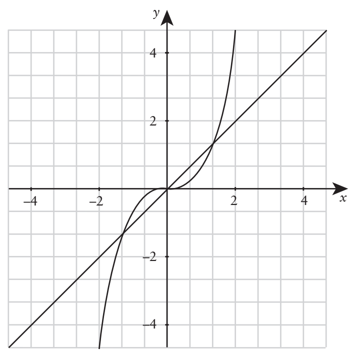
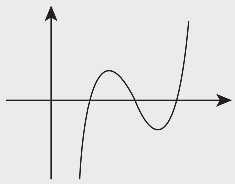
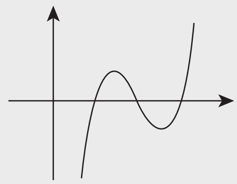
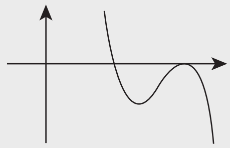
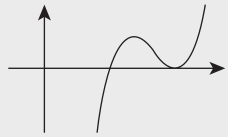
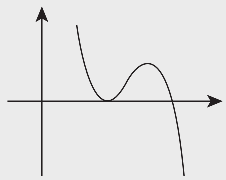
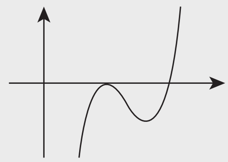
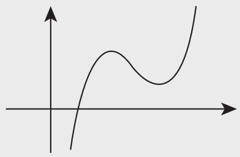
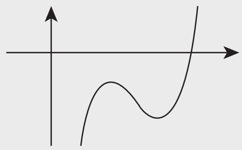
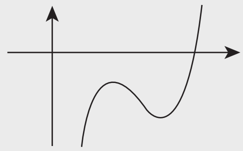
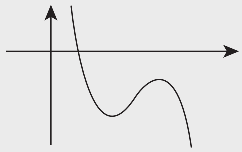


Figura 3.19 Comparación gráfica de una función cúbica y una función lineal.

Gráficamente la diferencia es clara. Pero la gráfica de una cúbica puede tomar formas mucho más variadas. Quizá esta sea la razón por la cual no tiene un nombre como gráfica, es decir, la gráfica de un polinomio de primer grado recibe el nombre de *recta*, la gráfica de un polinomio cuadrático recibe el nombre de *parábola*; pero la gráfica de un polinomio de tercer grado, en la mayoría de los textos, no tiene un nombre como tal. Algunos la han llamado *parábola cúbica*, pero aquí la llamaremos simplemente *cúbica*, al igual que su función. Otra razón de este fenómeno radica en el origen de estas curvas, tanto la recta como la parábola son elementos de la geometría analítica, rama que en el siglo XVII surgió del estudio de las figuras y transformaciones geométricas dadas por ecuaciones algebraicas. Las puertas a estas ramas fueron abiertas por Descartes y Fermat, pero sólo incluían problemas planos. Fue Newton en 1704 quien dio un paso importante al publicar la obra *Enumeración de las curvas de tercer orden*, donde la modelación dio un sentido distinto a las funciones con grado mayor a dos.

Veamos en el siguiente cuadro[1] las formas gráficas que presentan las funciones cúbicas.

Cuadro 3.1 Formas gráficas de la función cúbica.

En la tabla	Comportamiento alrededor del cero	Representación gráfica	
3 ceros	**3 cambios de** positivo a negativo o negativo a positivo **∴ en la gráfica hay 3 cruces con el eje x**		
2 ceros	**1 cambio de** positivo a negativo o negativo a positivo y **1 permanencia de signo** positivo (decreciente a creciente) o negativo (creciente a decreciente) **∴ en la gráfica hay 1 cruce y 1 toque tangencial con el eje x**		
			
1 cero	**1 cambio de** positivo a negativo o negativo a positivo **∴ en la gráfica hay 1 cruce con el eje x**		
			

El cuadro anterior responde a la pregunta: ¿qué puedo observar en la tabla de una función cúbica y como se traduce esto en una gráfica? Pues bien, en la tabla puedes encontrar tres, dos o un cero (columna 1); pero en caso de no haberlos explícitamente se pueden observar ciertos comportamientos que se den a su alrededor (columna 2). Las características que muestran estas dos columnas se ven reflejadas en las formas gráficas de la columna 3.

[1]Para estas gráficas se usaron los ejes de coordenadas como referencia, pero su punto de intersección no es necesariamente el punto (0, 0).

Nota: en el último caso (1 cero) se dibujaron sólo cuatro posibles gráficas. En dicho caso pudo encontrarse la primer gráfica tratada en esta sección, la cual no se colocó por tener una característica distinta a las cuatro dibujadas, ¿cuál crees que sea esta característica?

Analicemos el siguiente ejemplo a partir de la tabla que se muestra a continuación:

x	y
0.3	–8.092
0.5	–4.5
0.8	–1.152
1.1	0.324
1.3	0.588
1.5	0.5
1.9	0.036
2.3	0.468
2.5	1.5

Se observa que tenemos tan solo en un pequeño intervalo características suficientes para analizar y ver la forma de una función cúbica. Tomemos en consideración que:

- Estos puntos están definidos sobre el eje x positivo, lo cual no significa que no exista gráfica en la parte negativa del eje.
- Del punto (0.3, –8.092) al punto (0.8, –1.152) observamos una función negativa creciente.
- Del punto (0.8, –1.152) al punto (1.1, 0.324) observamos que la función tiene un cambio de signo. Esto nos habla de una gráfica que cruza con el eje x, es decir, que existe una x entre los puntos anteriores que provoca que y sea igual a cero.
- Del punto (1.1, 0.324) al punto (1.3, 0.588) observamos una función positiva creciente, pero de (1.3, 0.588) a (1.9, 0.036) la función es decreciente y se mantiene positiva. Lo anterior habla de una cota superior en un intervalo. Sin embargo, cuando observamos que de (2.3, 0.468) a (2.5, 1.5) la función permanece positiva y es creciente, estamos pensando en una cota inferior en otro intervalo.

Entonces, para esta tabla tenemos el caso de una gráfica que cruza una vez al eje x (con un cambio de negativo a positivo) y un toque tangencial al eje (donde permanece positiva). La gráfica que define a dicha función se muestra en la figura 3.20.

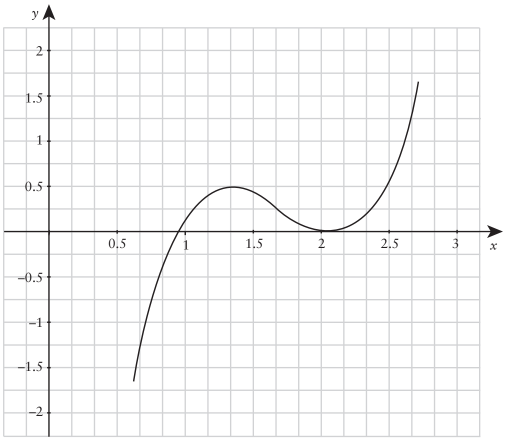


Figura 3.20 Función cúbica con un cruce y un toque tangencial en el eje x.

Es claro que al hacer un punteo sobre el plano la tarea final es unir dichos puntos para bosquejar la gráfica, pero siempre es importante analizar todos los datos que puedan darnos información sobre cómo se comporta la función. Por ejemplo, en el caso de ésta y muchas gráficas cúbicas, hay un intervalo donde su crecimiento es variado, crece, decrece, vuelve a crecer, etc., pero fuera de ese intervalo siempre hay un comportamiento constante. Es decir, en este caso la gráfica viene de $-\infty$ creciendo hacia el intervalo mencionado, y después la gráfica crece hacia ∞.

Actividad 3.4

1. Sea $f(x) = x^3$ la función que produce la siguiente tabla de valores:

x	$f(x)$
−3	−27
−2	−8
−1	−1
0	0
1	1
2	8
3	27

a) ¿Qué funciones $f_n(x)$ producen las siguientes tablas?

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
−3	−20	−1	−54
−2	−1	0	−16

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
–1	6	1	–2
0	7	8	0
1	8	27	0
2	15	64	16
3	34	125	27

2. Edita las siguientes tablas en GeoGebra y elabora la lista de datos correspondiente.

x	$f(x)$
–2	0
–1	8
0	6
2	–4
3	0
4	18

x	$g(x)$
–5	0
–3	21
0	0
2	21

x	$h(x)$
–4	–112
–2	–20
0	0
2	–4
4	16
6	108

a) Una vez graficados, define algunas funciones de la forma $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ que se aproximen a ellos.

3. Tabula las siguientes expresiones para los valores de x que tú desees. Analiza dónde, o alrededor de qué valores, la función es igual a cero.

a) $y = x^3 + x^2 + x$

b) $y = 0.5x^3 - 2x^2 + x$

c) $y = -2x^3 + x^2 + 6x - 3$

d) $y = x^3 + x^2 - x$

e) $y = x^3 + x^2 + x - 3$

4. Grafica por parejas las funciones anteriores con la gráfica de su parte lineal (por ejemplo, $y = x^3 + x^2 + x$ y $y = x$), ¿en qué zona son semejantes?, ¿a qué crees que se deba? Tabula alrededor de esa zona y discute el crecimiento de cada pareja de funciones.

Capítulo 4

MÉTODO DE LAS TRANSFORMACIONES

En el capítulo anterior analizamos las características numéricas y gráficas de tres funciones que nos servirán de punto de partida en la construcción de muchas otras gráficas. En este capítulo haremos un análisis de estas mismas funciones moviéndose a través del plano cartesiano, usando solamente operaciones con constantes. Cordero y Solís (2001), trabajaron con la transformación de diversas situaciones de enseñanza y aprendizaje para contenidos de cálculo utilizando la transformación $y = C[f(ax + c)] + D$, con la finalidad de construir un argumento gráfico que estableciera relaciones entre funciones. En este capítulo el objetivo es establecer un vínculo entre las distintas representaciones de una función usando el software GeoGebra en forma dinámica. Al igual que en el capítulo anterior analizaremos las funciones $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, pero con la perspectiva de las transformaciones a fin de obtener las gráficas de estas mismas funciones desplazadas o alargadas o comprimidas en el plano de coordenadas.

A lo largo de nuestra formación matemática, hemos visto en diversas áreas el uso del plano de coordenadas y es muy común escuchar términos como "eje de las abscisas" y "eje de las ordenadas", "eje x" y "eje y", el eje positivo (negativo) x" y el "eje positivo (negativo) y", etcétera. Como recordatorio, se verá el plano de coordenadas y sus etiquetas más usuales (figura 4.1).

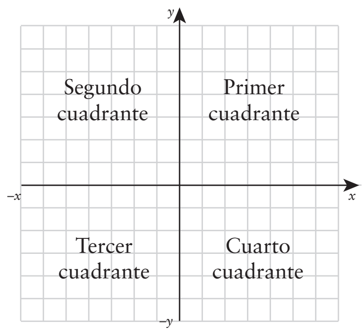


Figura 4.1 Plano cartesiano.

Un objetivo adicional es analizar las funciones del capítulo anterior, para explorar su gráfica en el plano a través de operaciones con la fórmula y viceversa. Observa que la transformación $y = C[f(ax + c)] + D$ supone solo operaciones con números a partir de las funciones básicas $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$. Este será el motivo por el cual para el caso de la recta y la parábola encontraremos todas las formas gráficas posibles, pero no así para la cúbica, cuya variación de formas se obtiene generalmente con otro tipo de operaciones.

4.1 La recta

Si se analiza la función $f(x) = x$, tenemos la transformación $y = C[f(ax + c)] + D$, de tal manera que la función queda de la siguiente forma:

$$y = C[ax + c] + D$$

$$y = Cax + Cc + D$$

Sea $A = Ca$ y $B = Cc + D$, la función queda así:

$$\boldsymbol{y = Ax + B}$$

Entonces, los parámetros que se deben variar para construir distintas rectas son A y B. Para variar inicialmente el parámetro B, podemos hacer uso de GeoGebra.

1. Construye en GeoGebra la gráfica de la función $f(x) = x$, la cual será el referente para analizar el cambio que provoca el parámetro B cuando se suma a la función.
2. Configura una ventana de visualización de, aproximadamente, $-10 \leq x \leq 10$ y $-10 \leq y \leq 10$.
3. Selecciona la herramienta , podrás crear un "Deslizador" haciendo clic sobre la "Vista Gráfica". Completa los datos que se piden, tal como se muestra en a figura 4.2:

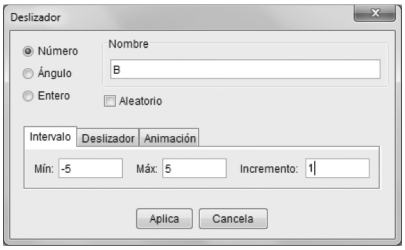


Figura 4.2 Pantalla referente al deslizador en GeoGebra.

4. Define la función y pulsa Enter para que aparezca la gráfica en la "Vista Gráfica". Observa que la gráfica corresponde a $g(x) = x + B$, según el valor que tenga el deslizador B de inicio. Por ejemplo, en la figura 4.3 tenemos las gráficas de $f(x) = x$ (dibujada con línea punteada para distinguirla) y de $g(x) = x + 1$ porque $B = 1$.

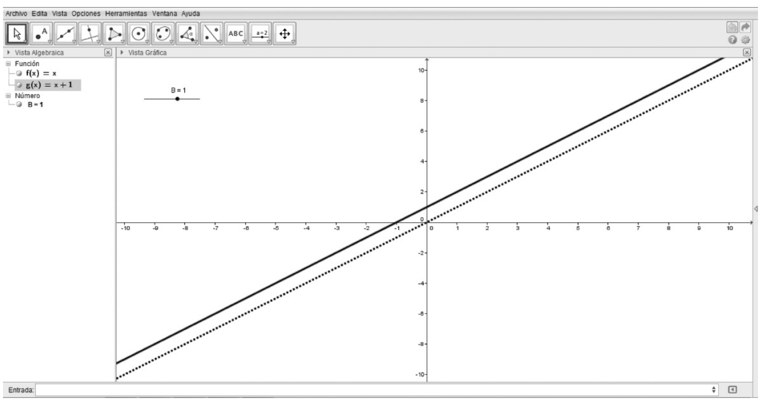
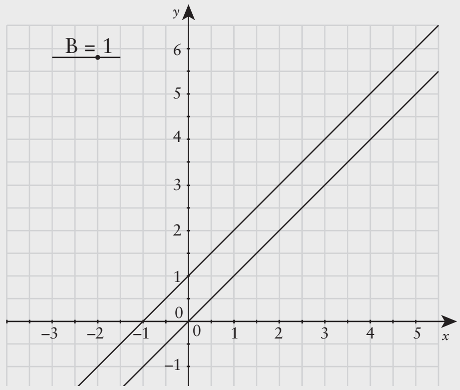
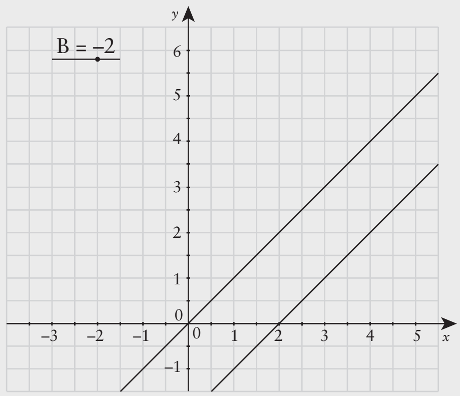


Figura 4.3 Representación gráfica de $f(x) = x$ y $g(x) = x + 1$.

5. Manipula el deslizador, a la izquierda o a la derecha, para que B tome otros valores y observes su efecto en la gráfica de $g(x)$.

Gracias a este dinamismo podemos observar el efecto gráfico que tiene el parámetro B al sumarlo a la función $f(x) = x$, el cual podemos resumir en la siguiente tabla:

Valor de B	**Efecto al sumarlo a $f(x) = x$**	**Gráfica** **($f(x) = x$ es la función cuya gráfica pasa por el origen)**
$B > 0$	Desplazamiento hacia arriba	
$B < 0$	Desplazamiento hacia abajo	

Si hablamos de las regiones que recorre la gráfica de la función $f(x) = x$ cuando le sumamos una constante se dice que al sumarle una constante la gráfica que estaba en el primer y tercer cuadrante ahora está en el primero, segundo y tercer cuadrante, y cuando se le resta una constante la gráfica que estaba en el primer y tercer cuadrante ahora está en el primero, tercer y cuarto cuadrante.

Ahora analicemos el efecto del parámetro A en $g(x) = Ax + B$, tomando un valor de $B = 0$, para hacer un análisis análogo al anterior, es decir, considerando si $g(x) = Ax$, como la multiplicación por una constante de la función $f(x) = x$.

1. Define un nuevo deslizador, ahora para el parámetro A y modifica la función para tener $g(x) = Ax + B$ y mueve el deslizador de B a 0 (figura 4.4). Comenzaremos analizando el efecto del parámetro cuando éste es positivo.

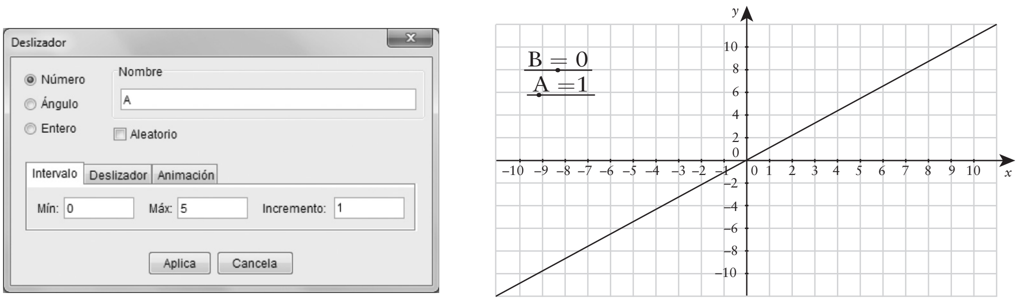


Figura 4.4 Deslizador y gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ sobrepuestas para $A = 1$ y $B = 0$.

2. Manipula el deslizador para que A tome otros valores y veas su efecto en la gráfica de $g(x)$. ¿Qué sucede cuando $A = 0$?, en general, ¿cuál es el efecto de este parámetro sobre la gráfica?
3. Observa en la figura 4.5 la secuencia de gráficas para cuando el parámetro A toma diferentes valores.

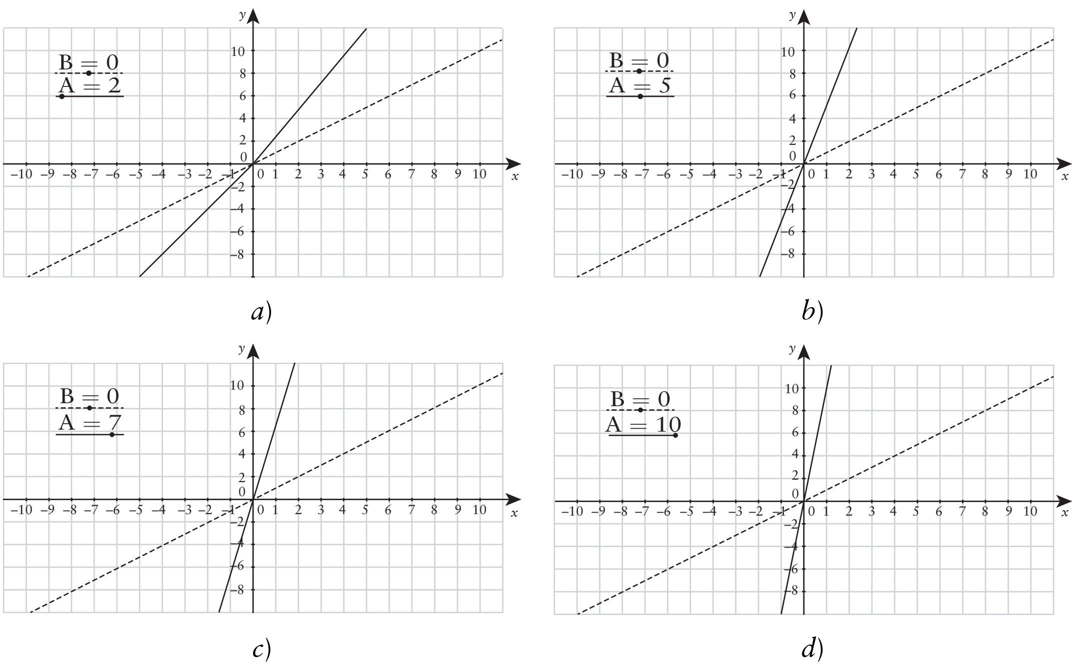


Figura 4.5 Deslizador y gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ sobrepuestas para $A = 1$ y $B = 0$.

Como se puede observar el parámetro A está afectando la inclinación de la recta, conforme el parámetro aumenta la recta se acerca al eje y, o es más inclinada. Esto suena lógico si se piensa en el coeficiente que acompaña a la x como la pendiente de la recta. La pregunta

ahora es ¿qué necesito para que la recta se acerque mucho al eje x? Una respuesta común en el alumno es: "multiplicar por un número negativo". Definamos al parámetro A con valores negativos, tal y como muestra en la figura 4.6:

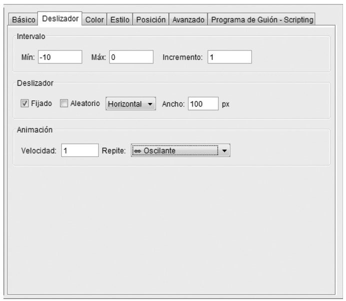


Figura 4.6 Definición de parámetros negativos en GeoGebra.

Observemos las gráficas que se muestran en la figura 4.7:

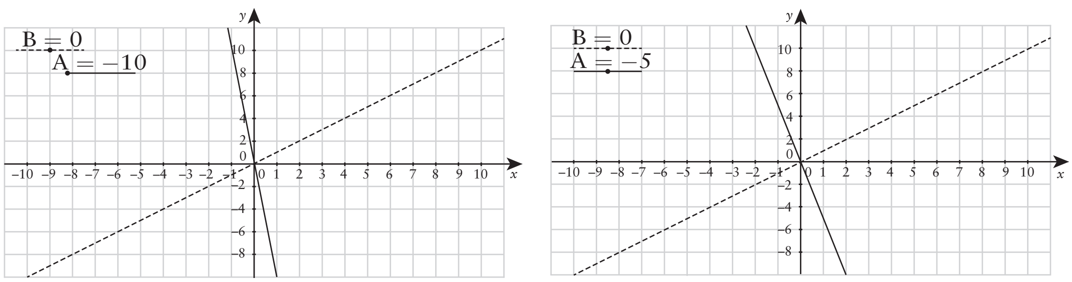


Figura 4.7 Representación gráfica de funciones con parámetros negativos.

Observemos que tiene el mismo efecto que cuando es positivo, si hablamos del valor absoluto de A, es decir, cuando éste es grande sigue pegando la recta al eje y, sólo que ahora la inclinación de la recta es distinta, la recta es decreciente.

Veamos qué sucede si el parámetro A varía en el intervalo $[-1,1]$, tal como se define en la figura 4.8:

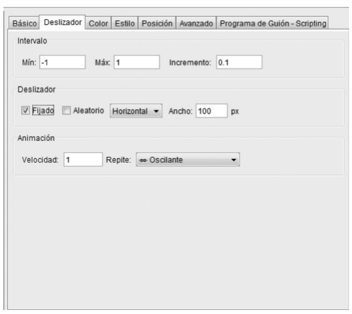


Figura 4.8 Definición del parámetro A en el intervalo $[-1,1]$.

Unas gráficas correspondientes a los diferentes valores se muestran en la figura 4.9:

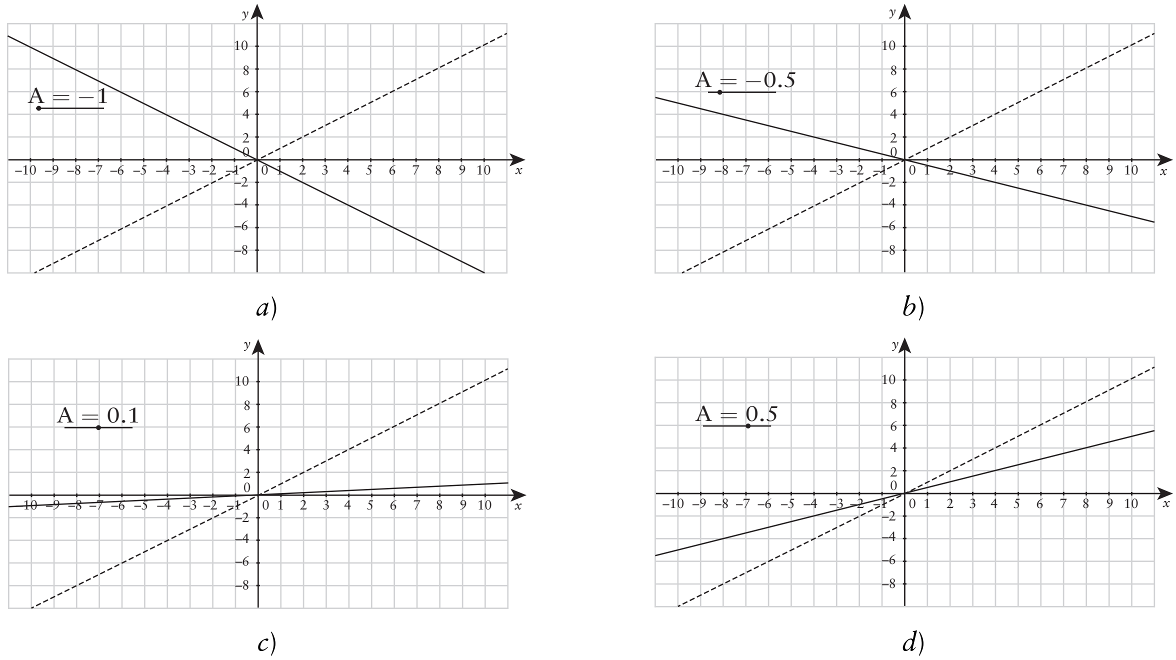
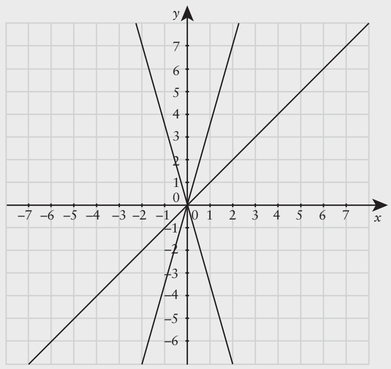
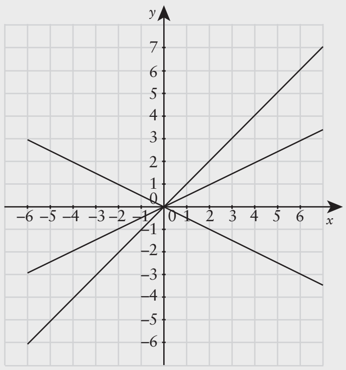


Figura 4.9 Representación gráfica de *a*) $f(x) = x$ y $g(x) = -x$; *b*) $f(x) = x$ y $g(x) = -0.5x$; *c*) $f(x) = x$ y $g(x) = 0.1x$, y *d*) $f(x) = x$ y $g(x) = 0.5x$.

Entonces, lo que necesitamos para pegar la recta al eje x es un valor muy pequeño de A, positivo o negativo. Concluyamos en una tabla el efecto del parámetro A al multiplicarlo a la función $f(x)= x$.

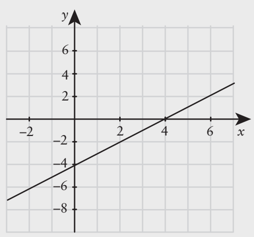
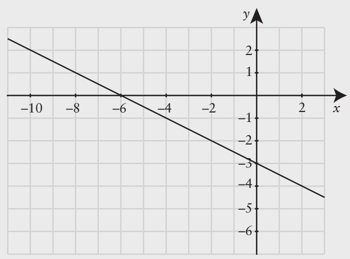
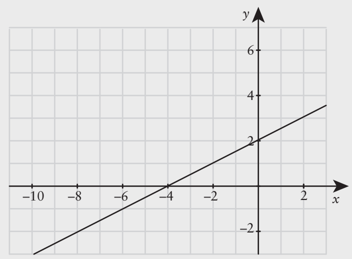
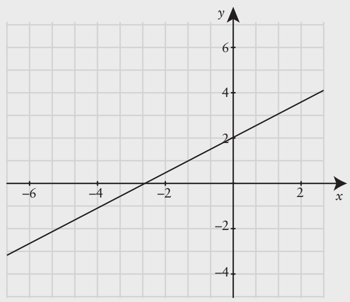
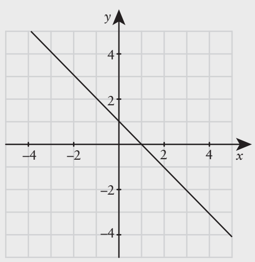
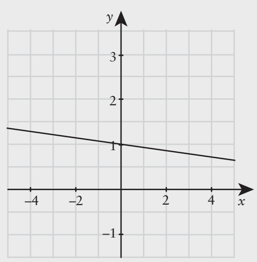
Valor de A	Efecto al multiplicarlo a $f(x) = x$	Gráfica ($f(x) = x$ es la función cuya gráfica pasa por el origen)
$1 < \lvert A \rvert$	Mayor inclinación (pega la gráfica de $f(x) = x$ al eje y). Si el signo de A es negativo la recta se refleja respecto del eje x	 $A = -5, 1, 5$

$\lvert A \rvert < 1$	Menor inclinación (pega la gráfica de $f(x) = x$ al eje x). Si el signo de A es negativo la recta se refleja respecto del eje x	 $A = -0.5, 1, 0.5$

Actividad 4.1

1. ¿Por qué la recta $y = -x - 6$ nunca pasa por el primer cuadrante?
2. Describe el cambio de región de la gráfica al variar ambos parámetros de la función $g(x) = Ax + B$.
3. Propón funciones para las siguientes gráficas.

Nota: observa la escala.

 Gráfica 1	 Gráfica 2	 Gráfica 3
 Gráfica 4	 Gráfica 5	 Gráfica 6

4. Haz un "bosquejo" de la gráfica de cada uno de las siguientes rectas. No realices cálculos numéricos, ni utilices el *software* para graficar, sólo inclina y desplaza de manera correcta la recta prototipo $f(x) = x$.

   a) $f(x) = -5x + 3$

   b) $f(x) = -0.9x - 13$

   c) $f(x) = 6x - 9$

   d) $f(x) = 8x + 3$

   e) $f(x) = 0.05x + 10$

5. ¿Qué valor deben tomar los parámetros $y = Ax + B$ para que la recta sólo pase, de ser posible, por los siguientes cuadrantes?

   a) El primer y tercer cuadrantes.

   b) El primer, segundo y tercer cuadrantes.

   c) El primer, segundo y cuarto cuadrantes.

   d) El segundo y cuarto cuadrantes.

   e) Todos los cuadrantes.

4.2 La parábola

Utilizando la transformación $g(x) = C[f(ax + c)] + D$, con $f(x) = x^2$ se puede tener:

$$g(x) = C(ax + c)^2 + D$$

$$g(x) = Ca^2(x + c/a)^2 + D$$

Al hacer dos cambios de variable en el que $A = Ca^2$ y $B = c/a$, la función se transforma en:

$$g(x) = A(x + B)^2 + D$$

Comencemos con el análisis del efecto que tienen los parámetros en la gráfica, realizando la siguiente secuencia de actividades en GeoGebra:

1. En una “Vista Gráfica”, con la ventana: $-6 \leq x \leq 6$ y $-20 \leq y \leq 20$, define la función $f(x) = x^2$ y los deslizadores A, B y D con los valores que se muestran en la figura 4.10, respectivamente:

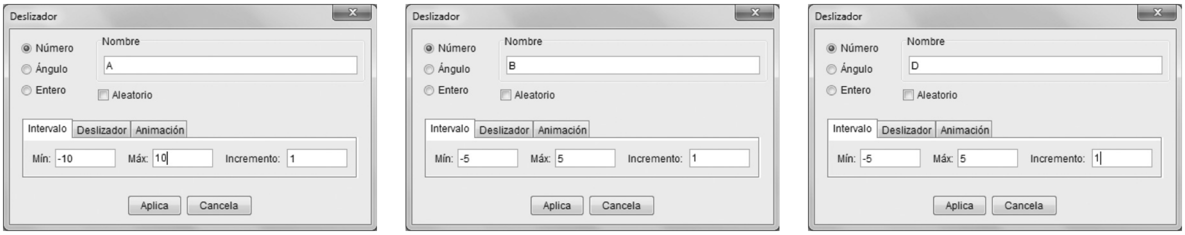


Figura 4.10 Definición de parámetros ***A***, ***B*** y ***D*** en GeoGebra.

2. Deja los deslizadores con los siguientes valores $A = 1$, $B = 0$ y $D = 0$; y define la función y grafícala. Aunque en la Vista gráfica tienes las gráficas de y sólo verás una, porque una está dibujada sobre la otra. En cuanto comiences a variar el parámetro A, observarás ambas gráficas.

3. Algunas de las gráficas que podrás ver se muestran en la figura 4.11:

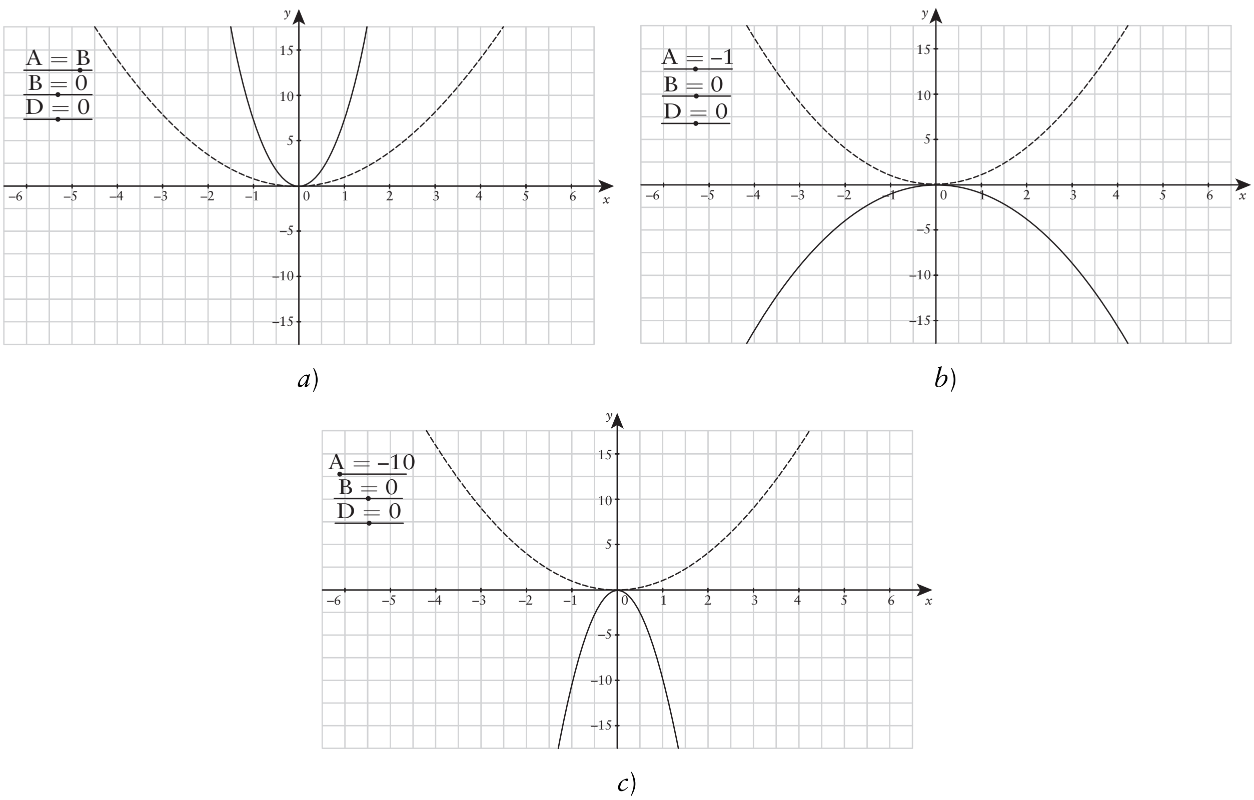
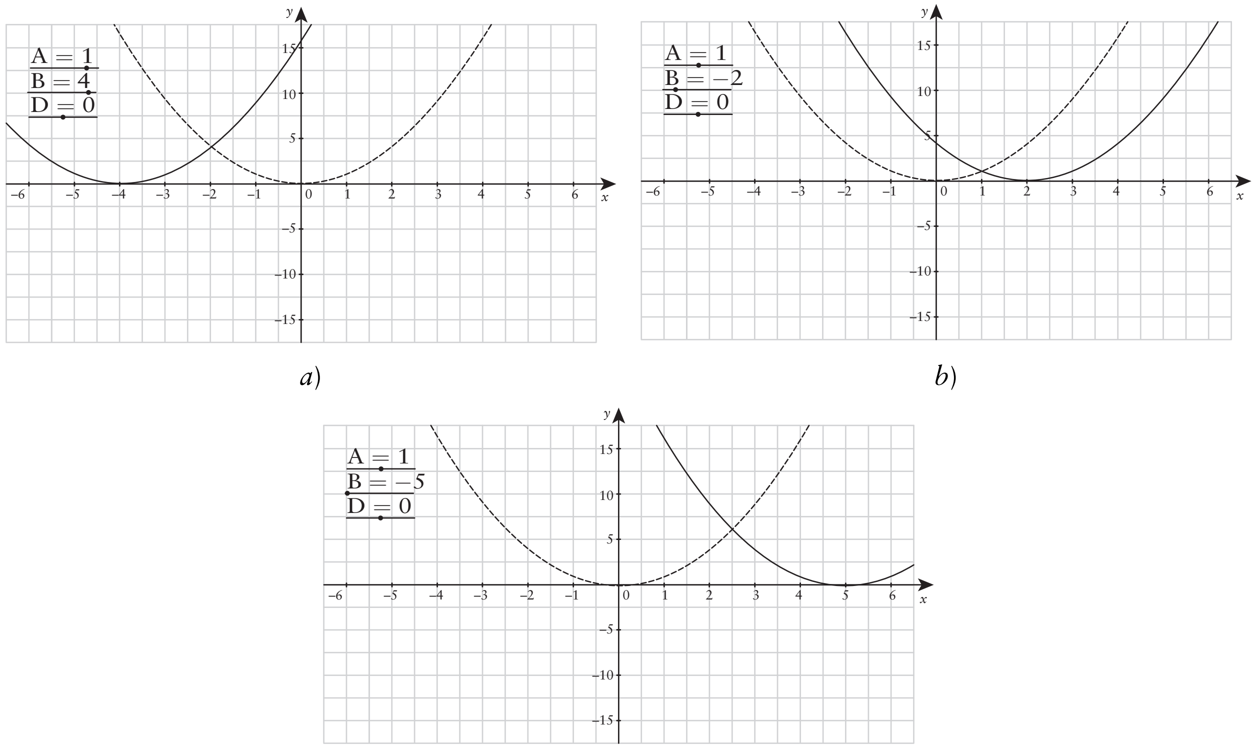


Figura 4.11 Representación gráfica de *a*) $f(x) = x^2$ y $g(x) = 8x^2$; *b*) $f(x) = x^2$ y $g(x) = -x^2$, y *c*) $f(x) = x^2$ y $g(x) = -10x^2$.

Algo que se observa a simple vista es que para valores positivos de A la parábola abre hacia arriba y para valores negativos abre hacia abajo. Conforme el valor de A se incrementa, tanto positivo como negativo, la parábola se cierra. Por el contrario, si el valor se hace pequeño (en valor absoluto) la parábola se abre. Quizá esta característica se observe mejor, en la misma ventana pero con el parámetro A moviéndose en el intervalo $[-1, 1]$.

Se debe observar, qué efectos gráficos se tienen al variar el parámetro B, recuerda dejar el deslizador A con valor 1 para hacer un comparativo con $f(x) = x^2$. Algunas de las gráficas que podrás ver se muestran en la figura 4.12:



a)

b)

c)

Figura 4.12 Representación gráfica de *a*) $f(x) = x^2$ y $g(x) = (x + 4)^2$; *b*) $f(x) = x^2$ y $g(x) = (x - 2)^2$, y *c*) $f(x) = x^2$ y $g(x) = (x - 5)^2$.

Como se puede observar el parámetro B desplaza horizontalmente a la parábola, hacia la derecha si es negativo y hacia la izquierda si es positivo. Vale la pena señalar que la parábola se mantiene tangente al eje x, pero al desplazarse cambia el punto de tangencia.

Por último, y utilizando la misma lógica de acción, se analiza el parámetro D y su efecto en la gráfica de la parábola. Recuerda mantener el deslizador $A = 1$ y el $B = 0$ para hacer un comparativo con $f(x) = x^2$. Algunas de las gráficas que podrás ver se muestran en la figura 4.13:

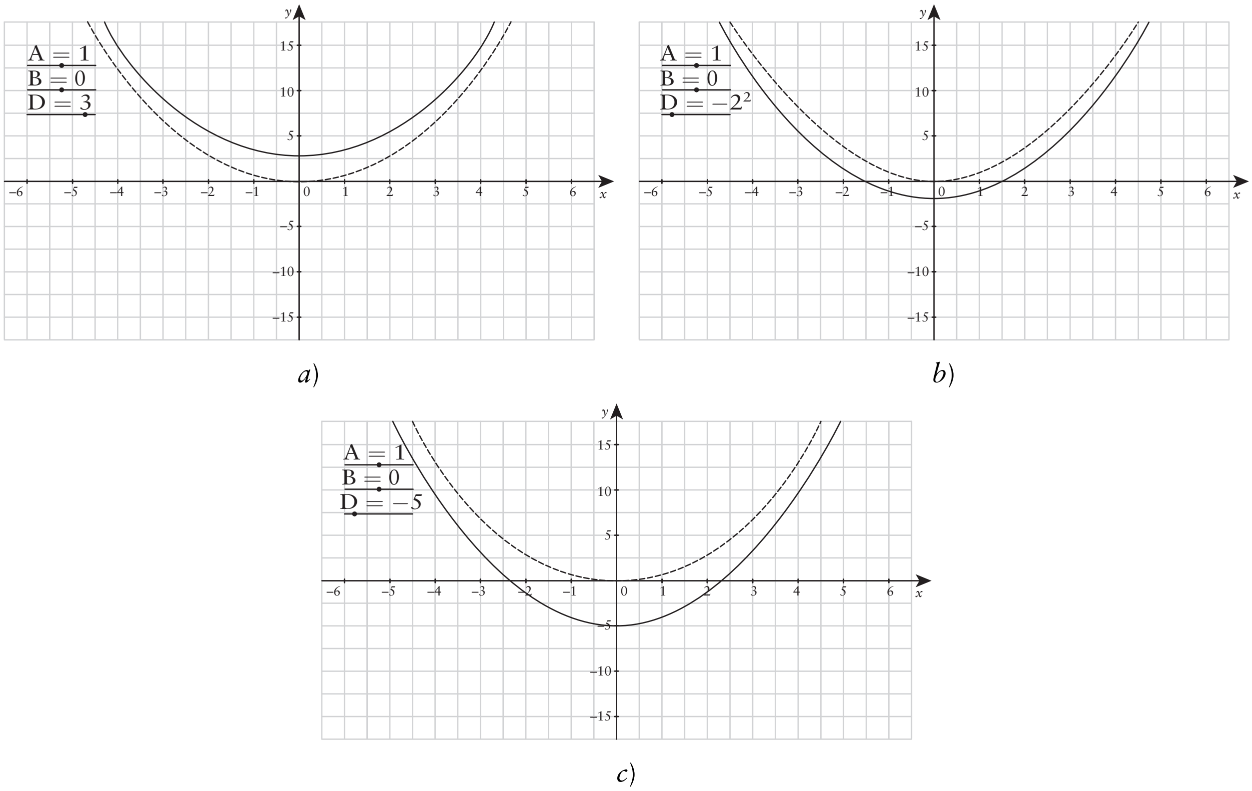
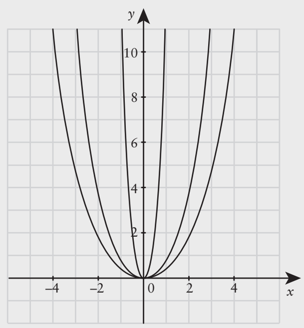
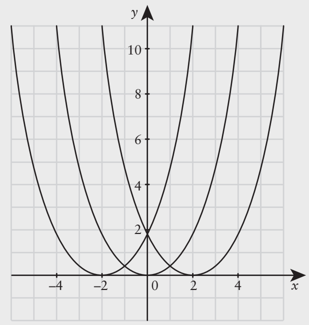
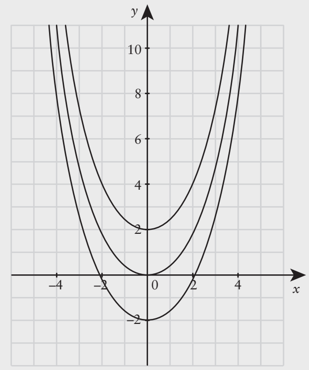


Figura 4.13 Representación gráfica de *a*) $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^2 + 3$; *b*) $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^2 - 2$, y *c*) $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^2 - 5$.

Se observa que el parámetro D desplaza a la parábola verticalmente. Si D es negativa la desplaza hacia abajo y si es positiva la desplaza hacia arriba. Cabe señalar que al desplazarse hacia abajo, la parábola cruza al eje x en dos puntos, y si se desplaza hacia arriba nunca cruza el eje.

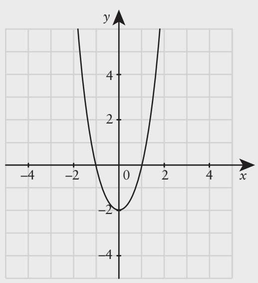
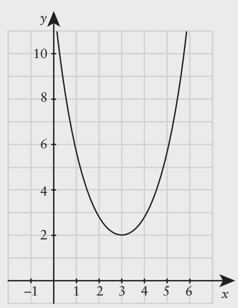
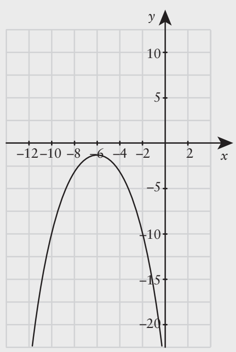
Concluyamos con una tabla los efectos de los parámetros A, B y D de la función $g(x) = A(x + B)^2 + D$, en la gráfica de $f(x) = x^2$.

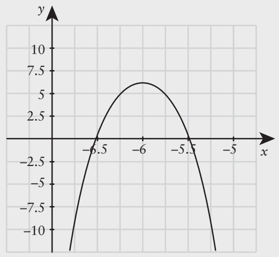
Parámetro	Descripción	Ejemplo
A	Abertura de la parábola (si $\lvert A\rvert$es grande se cierra la parábola y si $\lvert A\rvert$ es chico se abre la parábola)	 $A = 10, 1, 0.5$

B	Desplazamiento horizontal (hacia la derecha si $B < 0$ y hacia la izquierda si $B > 0$)	 $B = -2, 0, 2$
D	Desplazamiento vertical (hacia abajo si $D < 0$ y hacia arriba si $D > 0$)	 $D = -2, 0, 2$

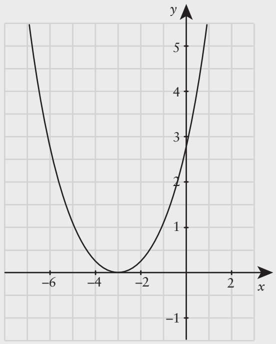
Actividad 4.2

1. Propón las funciones que creas correspondan a las siguientes gráficas. Observa cuidadosamente las escalas.

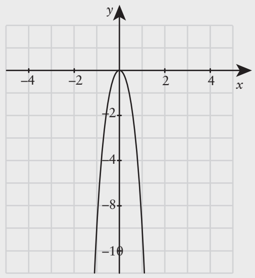
 Gráfica 1	 Gráfica 2	 Gráfica 3



Gráfica 4



Gráfica 5



Gráfica 6

2. Haz un "bosquejo" de la gráfica de cada una de las siguientes funciones. No realices cálculos numéricos, ni grafiques con calculadora. Con base a la gráfica de $f(x)= x^2$ realiza los cambios adecuados.

   a) $g(x) = -5(x+3)^2 - 2$

   b) $g(x) = 0.7(x\text{-}9)^2 + 8$

   c) $g(x) = -15x^2 - 10$

   d) $g(x) = -0.06(x + 6)^2 + 12$

3. Qué valores deben tomar los parámetros A, B y D en la función $g(x)= A(x + B)^2 + D$ para que alrededor de cero se parezca a las siguientes funciones. Grafica en GeoGebra con una ventana cerca del origen (0, 0).

   a) $k(x) = 3$

   b) $l(x) = 2x-1$

   c) $j(x) = -5x$

4. ¿Cómo es el cambio en las regiones en el plano que provocan los parámetros en la función $g(x) = A(x + B)^2 + D$, respecto de la gráfica $f(x) = x^2$? Analízalos de forma individual y combinada.

5. Completando el trinomio cuadrado perfecto escribe las siguientes funciones en su forma $g(x) = A(x + B)^2 + D$ y realiza un bosquejo de su gráfica usando sólo las transformaciones.

   a) $f(x)= x^2 - 8x + 16$

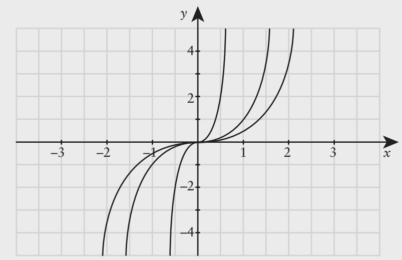
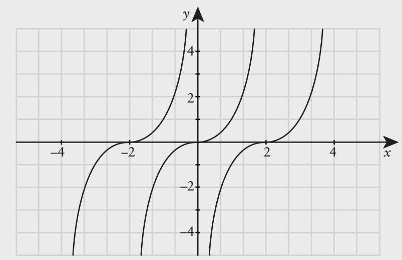
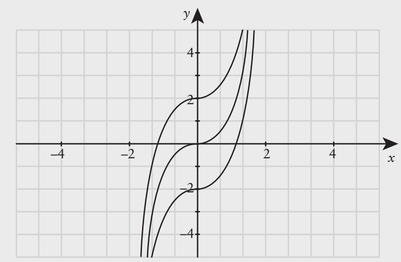
   b) $f(x)= 4x^2 - 8x + 16$

   c) $f(x)= x^2 + 7x + 8$

   d) $f(x)= 6x^2 - 18x + 15$

4.3 La cúbica

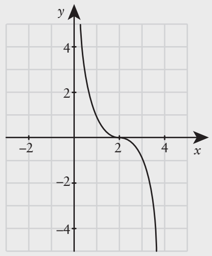
Como hemos observado en los casos anteriores los parámetros de la transformación $g(x) = Af(x + B) + D$ realizan tres tipos de cambios en la gráfica. Sin embargo, para los casos anteriores esas transformaciones sí eran suficientes para obtener todas las formas gráficas posibles, en el caso de la cúbica no es así. Observemos la siguiente tabla que muestra los efectos de los parámetros:

Parámetro	Descripción	Ejemplo
A	Alargamiento de la parábola (si es grande se alarga la gráfica y si es chico se comprime la gráfica)	 $A = 10, 1, 0.5$
B	Desplazamiento horizontal (hacia la derecha si $B < 0$ y hacia la izquierda si $B > 0$)	 $B = -2, 0, 2$
D	Desplazamiento vertical (hacia abajo si $D < 0$ y hacia arriba si $D > 0$)	 $D = -2, 0, 2$

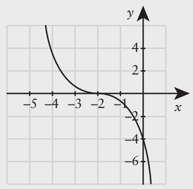
Como ya se había mencionado, estas transformaciones no provocan todas las formas gráficas de una función cúbica, ¿cuál crees que sea la razón? Observa que para los casos anteriores la gráfica de la función siempre cruza una vez el eje x, sin embargo, el parámetro D tiene un efecto sobre este cruce, ¿cómo describirías la diferencia de los cruces?

Actividad 4.3

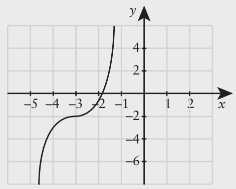
1. Propón las funciones que creas correspondan a las siguientes gráficas. Observa cuidadosamente las escalas.



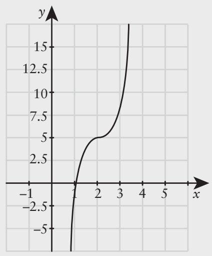
Gráfica 1



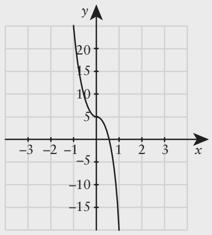
Gráfica 2



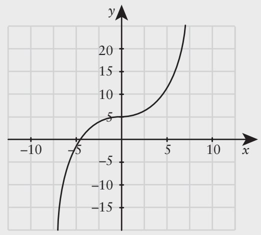
Gráfica 3



Gráfica 4



Gráfica 5



Gráfica 6

2. Haz un "bosquejo" de la gráfica de cada una de las siguientes funciones. No realices cálculos numéricos, ni grafiques con calculadora. Con base en la gráfica de $f(x) = x^3$, realiza los cambios adecuados.

   a) $g(x) = -5(x + 3)^3 - 2$

   b) $g(x) = 0.7(x - 9)^3 + 8$

   c) $g(x) = -15x^3 - 10$

   d) $g(x) = -0.06(x + 6)^3 + 12$

3. ¿Cómo es el cambio en las regiones en el plano que provocan los parámetros en la función $g(x) = A(x + B)^3 + D$ respecto de la gráfica $f(x) = x^3$? Analízalos de forma individual y combinada.

Capítulo 5

MÉTODO DE LAS OPERACIONES

En los capítulos anteriores hemos mostrado cómo bosquejar gráficas a partir de un análisis numérico (capítulo 3) y a partir de gráficas prototipo y sus transformaciones (capítulo 4). Sin embargo, hay otra forma de tratar a las funciones que nos permite bosquejar gráficas a partir de un análisis visual más amplio que involucra simultáneamente herramientas analíticas y numéricas. Un punto clave ahora será el partir exclusivamente de funciones como, $y = x$, $y = x^2$ y $y = x^3$, junto con algunas de las transformaciones antes vistas para operar gráficamente y obtener de este modo, las gráficas de otras funciones. En este momento es importante apuntar que lo desarrollado aquí no son sólo técnicas de graficación, ni son pasos a seguir para que el lector grafique de manera correcta. Uno de nuestros objetivos es propiciar la relación entre objetos matemáticos aparentemente disjuntos, esto es, queremos vincular y transitar entre diversas representaciones de la función.

5.1 Suma

Antes de iniciar el desarrollo de este capítulo es necesario aclarar que operar gráficamente, en el sentido que se verá a continuación, es una forma de llamar a las operaciones entre gráficas. En realidad se hace referencia a operaciones entre funciones, pero con un análisis gráfico. Para hacer este análisis se parte del criterio de sumar imágenes (alturas en este caso). Por ejemplo, analicemos la suma que se muestra en la figura 5.1:

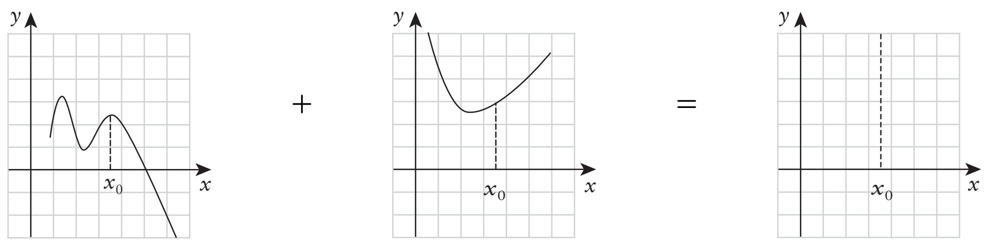


Figura 5.1 Suma gráfica de dos alturas.

El resultado en x_0 sería la suma de dos alturas. En el caso de las operaciones gráficas existen puntos clave que pueden dar idea del resultado global, se trata de lo que se llama análisis local de los puntos, en donde, las gráficas cruzan al eje x; es decir, aquellos donde los valores de la función se hacen igual a cero.

Partamos del caso más sencillo, la suma de dos rectas. Diremos *recta* + *recta* en un sentido genérico, pues sabemos bien que estamos en realidad sumando números, aquellos que provienen de evaluar a las funciones lineales en un mismo punto.

5.1.1 Recta + recta

En el capítulo anterior estudiamos lo que sucede al sumar una constante con una expresión funcional, lo analizamos al verlo como una transformación. Sin embargo, cuando hacemos

$y = f(x) + k$, con k constante, se puede interpretar como la suma de una función f más la función $g(x) = k$. Esta g representa gráficamente a una recta horizontal. Entonces si se tiene la función $y_1 = x$ y $y_2 = 3$, la suma gráfica $y = y_1 + y_2$ dará como resultado forma gráfica que se muestra en la figura 5.2.

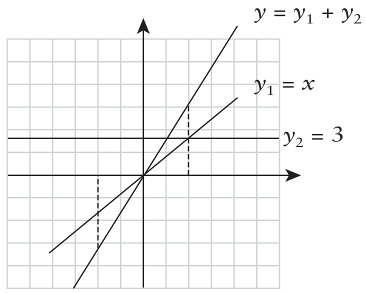


Figura 5.2 Suma gráfica de la recta $y_1 = x +$ constante $y_2 = 3$.

Y se observaría el mismo efecto, es decir, la gráfica de la función y_1 se desplaza verticalmente 3 unidades hacia arriba.

Al sumar las expresiones $y_1 = x$ y $y_2 = x$. Dado que las funciones representan dos rectas idénticas, de hecho, son la misma recta en el plano coordenado, veremos al graficar sólo una línea (figura 5.3) y lo que se hará es sumar su propia altura en dos puntos diferentes para unir finalmente los puntos obtenidos

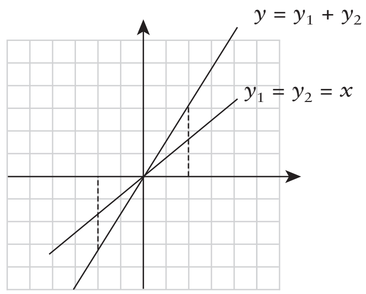


Figura 5.3 Suma gráfica de $y_1 = x + y_2 = x$.

Bajo el criterio de la suma de alturas y con un análisis local, se podrá realizar la suma de cualesquiera dos gráficas. Por ejemplo, para dos rectas arbitrarias, su suma podría representarse gráficamente utilizando los puntos donde ambas rectas cruzan al eje x. Esto es, en el punto en el que una de las rectas cruza el eje x (o su altura es igual a cero) la suma es igual a la altura de la otra recta, observa la figura 5.4:

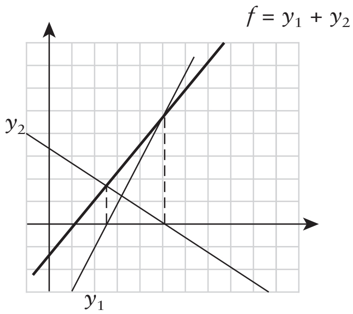


Figura 5.4 Suma gráfica de recta + recta.

Observemos que el resultado de sumar gráficamente dos rectas, da como solución una gráfica cuya inclinación y posición es distinta. Entonces, si tenemos:

$$y_1 = ax + b \text{ y } y_2 = cx + d$$

su suma, será:

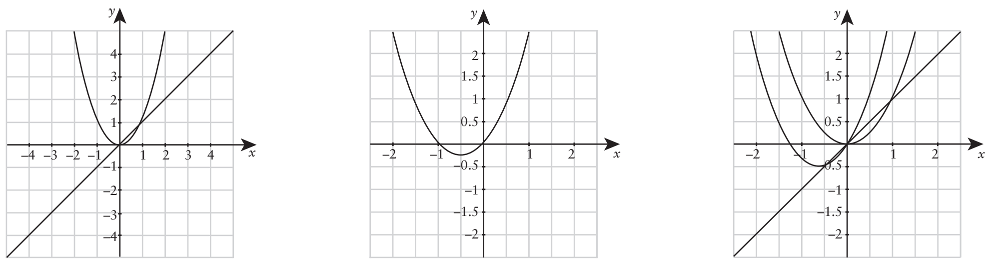
$$y_1 + y_2 = ax + b + cx + d = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c})x + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{d})$$

donde $(a + c)$ es el coeficiente de x y, por lo tanto, determina, como se sabe, la pendiente de la recta, mientras que $(b + d)$ determina la ordenada al origen.

En estos caso no es difícil descubrir que la suma de dos rectas es una recta, tanto gráfica como analíticamente, pero es necesario partir de los casos más sencillos, para tener herramientas útiles en operaciones posteriores más complejas.

5.1.2 Recta + parábola

Comencemos con el caso donde $y_1 = x$ y $y_2 = x^2$. Si se suman ambas funciones (figura 5.5), tenemos que:



a) *b*) *c*)

Figura 5.5 Representación gráfica de *a*) $y_1 = x$, $y_2 = x^2$; *b*) suma gráfica de $y_3 = y_1 + y_2 = x + x^2$ y *c*) representación gráfica de y_1, y_2 y y_3.

Observemos el último plano con un aumento considerable de la gráfica, tal como se muestra en la figura 5.6:

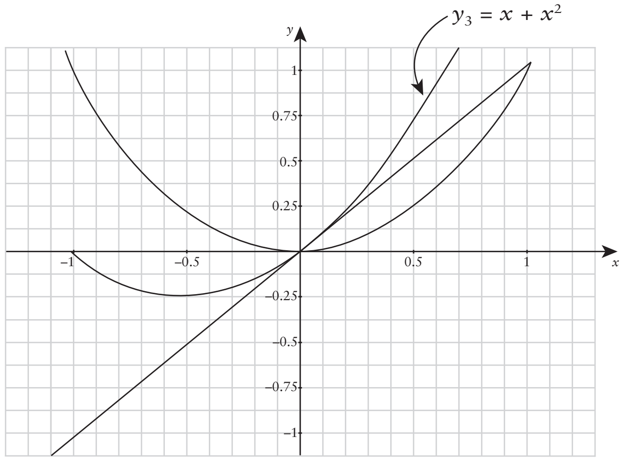
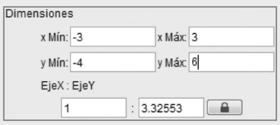
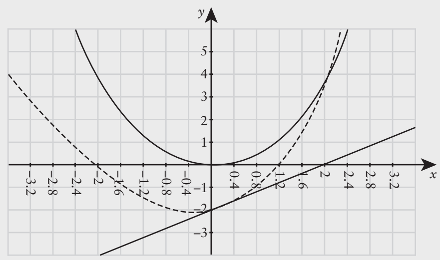
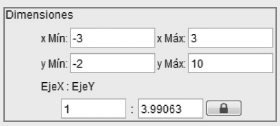
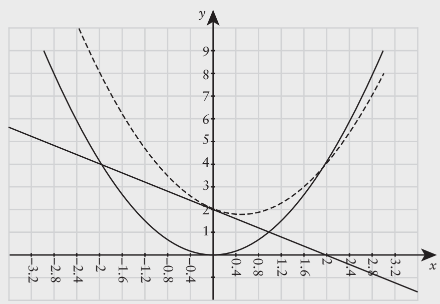
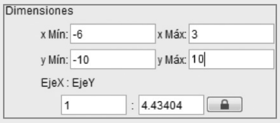
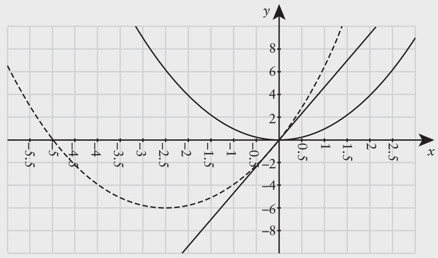
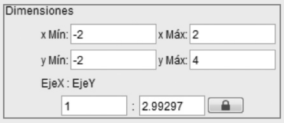
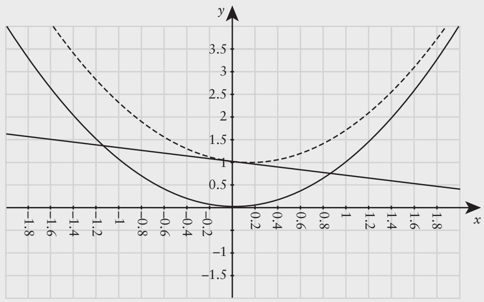


Figura 5.6 Acercamiento alrededor del origen de la figura 5.5c, suma de recta + parábola.

Lo que se nota en este caso es que de manera local, alrededor del punto (0, 0), la parábola se comporta como la recta. Como si la gráfica de la función $y_2 = x^2$ descansara sobre la recta y se inclinara hacia la izquierda. Veamos qué pasa cuando sumamos $x^2 + ax + b$. En GeoGebra, introduce las siguientes tríadas de funciones y observa las gráficas (tabla 5.1).

Tabla 5.1 Suma de recta + parábola

Ventana recomendada	Funciones	Gráficas
	$f(x) = x - 2$ $g(x) = x^2$ $k(x) = f(x) + g(x)$	
	$f(x) = -x + 2$ $g(x) = x^2$ $k(x) = f(x) + g(x)$	

	$f(x) = 5x$ $g(x) = x^2$ $k(x) = f(x) + g(x)$	
	$f(x) = -0.3x + 1$ $g(x) = x^2$ $k(x) = f(x) + g(x)$	

Para las gráficas de las funciones suma se utilizó una línea punteada, con el objetivo de distinguirlas. En este punto se puede decir que cuando a una recta le sumamos la parábola $y = x^2$, la suma se comporta localmente, alrededor de $x = 0$, como la recta misma, aunque mantiene la forma de parábola. Con GeoGebra se puede hacer un análisis, como el que se hizo en la tabla 5.1, para la suma de cualquier recta más la parábola $y = -x^2$. ¿Qué observas ahora?

Analíticamente lo que se tiene al sumar cualquier recta con una parábola $y_1 = x^2$ es una parábola con término lineal, esto es $y = x^2 + ax + b$ cuya recta tangente en el punto $(0, b)$ es precisamente $y_2 = ax + b$, por eso es que sus comportamientos son tan parecidos en esa zona. Sin embargo, algo muy distinto sucede al sumar $y_1 = ax + b$ con $y_2 = c(x + d)^2 + e$, debido a que la parábola anterior ya tiene una parte lineal implícita en su fórmula. Para este caso se puede hacer un análisis como el utilizado en la suma de rectas. Es decir, sumar las alturas tomando como puntos de referencia los cruces con el eje x (figura 5.7).

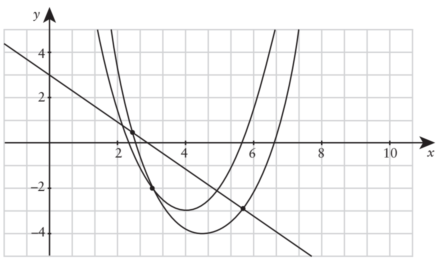


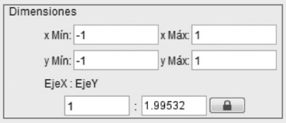
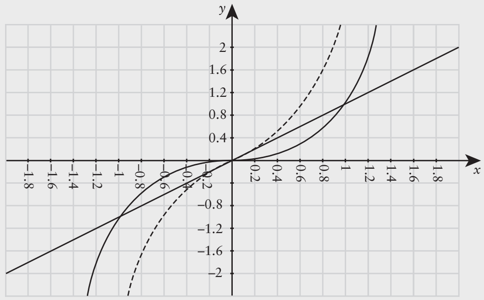
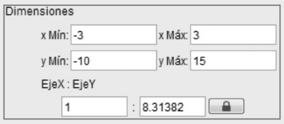
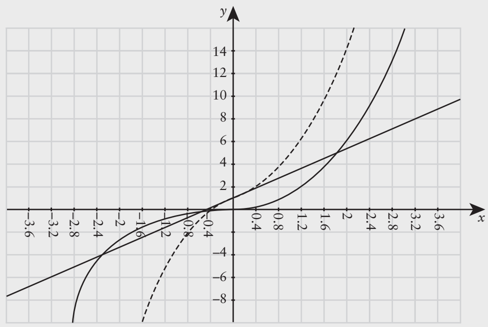
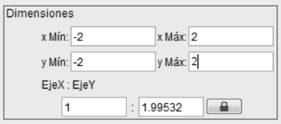
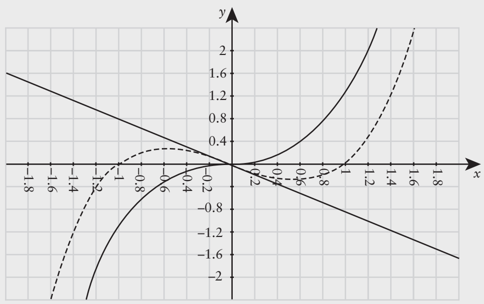
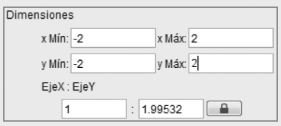
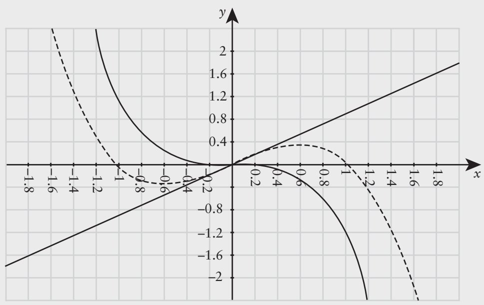
Figura 5.7 Suma de recta + parábola.

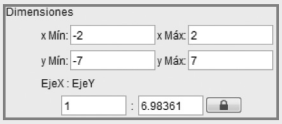
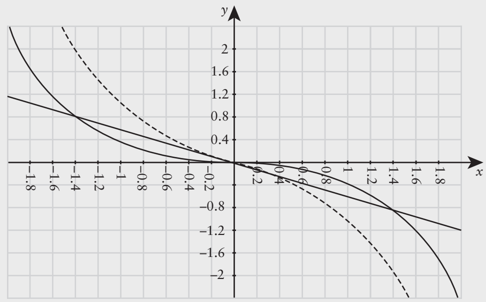
Entonces, la "parábola suma" es la que pasa por los tres puntos.

5.1.3 Recta + cúbica

Se analizará este caso justo como se hizo con el anterior. La tabla 5.2 muestra los distintos casos de la suma $f(x) = ax + b$ más $g(x) = cx^3$.

Tabla 5.2 Suma de recta + cúbica

Ventana recomendada	Funciones	Gráficas
	$f(x) = x^3$ $g(x) = x$ $k(x) = f(x) + g(x)$	
	$f(x) = x^3$ $g(x) = 3x + 1$ $k(x) = f(x) + g(x)$	
	$f(x) = x^3$ $g(x) = -x$ $k(x) = f(x) + g(x)$	
	$f(x) = -x^3$ $g(x) = x$ $k(x) = f(x) + g(x)$	

	$f(x) = -x^3$ $g(x) = -2x$ $k(x) = f(x) + g(x)$	

La suma sigue comportándose localmente, alrededor de $x = 0$, como la recta. Sin embargo, hay dos casos en los que la forma de la función cúbica cambia y justo son los casos donde los coeficientes de x y x^3 son de signo contrario. Esta forma gráfica de la cúbica ya se mencionó en el capítulo 3, pero no pudo ser construida con las transformaciones que se vieron en el capítulo 4.

Por ejemplo, la función suma $k(x) = x^3 - x$ puede expresarse como:

$$k(x) = x(x^3 - 1) = x(x + 1)(x - 1)$$

que puede interpretarse como la multiplicación de una recta por una parábola, o la multiplicación de tres rectas, operaciones gráficas que se realizarán más adelante. Por ahora, se propone la suma gráfica de cualquier recta y cualquier cúbica utilizando el análisis de la suma de las alturas, tomando como puntos de referencia los cruces con el eje x (figura 5.8).

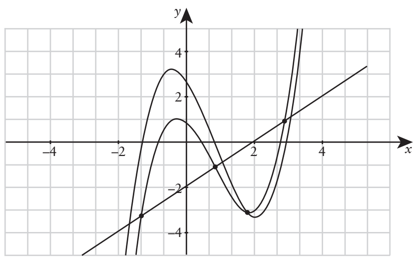


Figura 5.8 Suma de recta + cúbica.

La gráfica suma es entonces aquella que pasa por los cuatro puntos marcados.

5.1.4 Parábola + parábola

"Sumar" dos parábolas tiene el mismo sentido que "sumar" dos rectas. Pensemos en dos parábolas:

$$y_1 = a(x + b)^2 + c \text{ y } y_2 = d(x + e)^2 + f$$

Si $y = y_1 + y_2$, entonces:

$$y = [ax^2 + 2abx + ab^2 + c] + [dx^2 + 2dex + de^2 + f]$$

$$y = (a + d)\, x^2 + 2(ab + de)x + (ab^2 + c + de^2 + f)$$

Esto quiere decir que la suma es una parábola con posición y abertura distinta. La suma gráfica se puede hacer con el análisis de suma de alturas, aunque recordemos que como en ocasiones las parábolas no cruzan el eje x los puntos de referencia serán otros. Por ejemplo, el caso de la suma de las siguientes dos parábolas que no cruzan el eje x (figura 5.9).

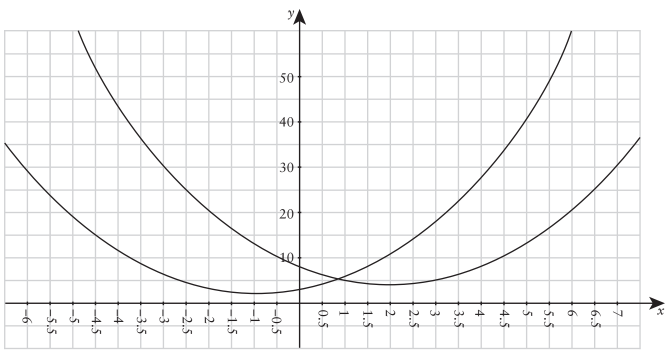


Figura 5.9 Suma de parábolas que no cruzan el eje *x*.

En este caso se toma como punto de referencia aquel donde se cruzan ambas parábolas, es decir, donde ambas tienen la misma altura. La suma será entonces, el doble de la que marca la altura del cruce. Ahora bien, se observa que ambas parábolas están por encima del eje x, por lo tanto, la suma será una parábola por encima del eje x y naturalmente será siempre mayor que sus sumandos. El que la suma sea mayor que sus sumandos la ubica en la región sombreada (figura 5.10) (recuerda que estamos sumando alturas y al sumar dos alturas positivas siempre obtendremos una altura mayor que cada una de ellas).

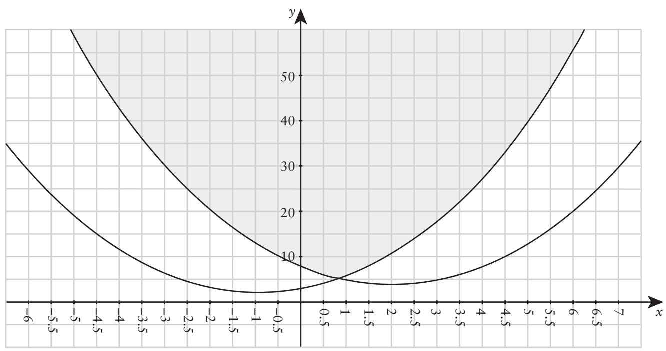


Figura 5.10 Zona donde se encontrará la suma de dos rectas que no cruzan al eje *x*.

Observemos en una ventana de visualización a las dos parábolas y a su suma (figura 5.11).

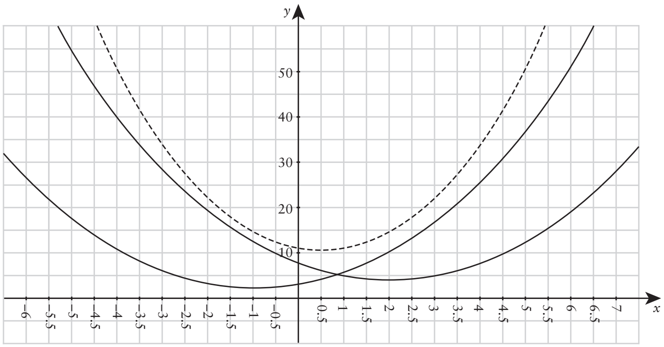


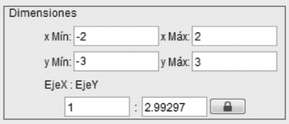
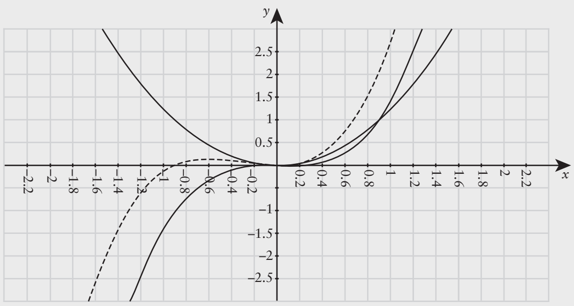
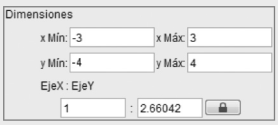
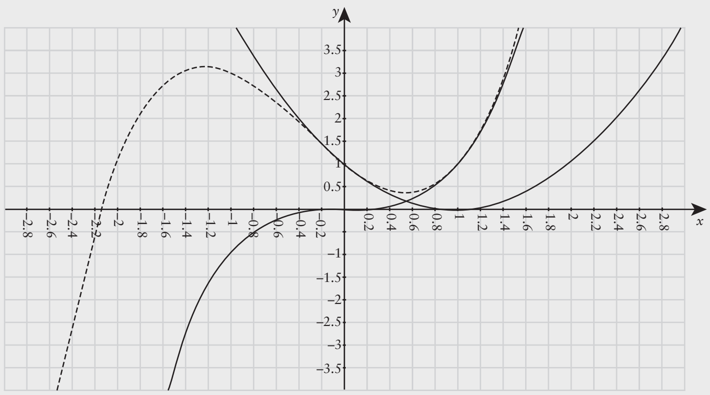
Figura 5.11 Dos parábolas que no cruzan el eje *x* y su suma.

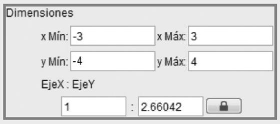
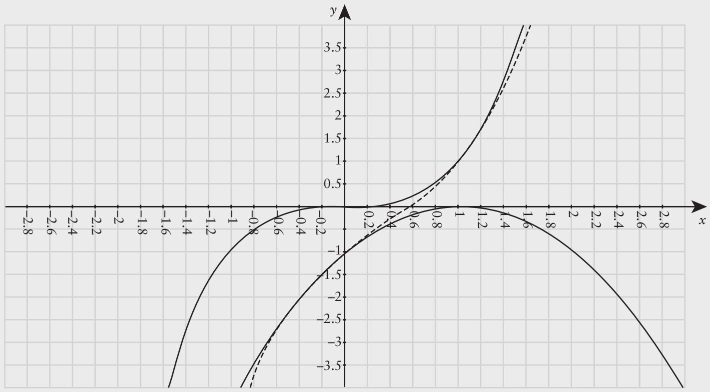
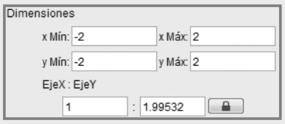
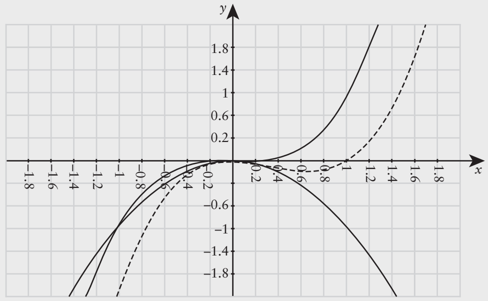
Como podrás darte cuenta, para el bosquejo de estas gráficas se necesitaron distintos argumentos, tales como aquel que proviene del contexto gráfico o del numérico e incluso del analítico. Esto es, en este momento la visualización está tomando un lugar muy importante en el desarrollo de estructuras mentales para el conocimiento de las formas gráficas.

5.1.5 Parábola + cúbica

Se analizará en la tabla 5.3, el efecto de sumar distintas parábolas con la gráfica de la función $y = x^3$.

Tabla 5.3 Suma de parábola + cúbica

Ventana recomendada	Funciones	Gráficas
	$f(x) = x^3$ $g(x) = x^2$ $k(x) = f(x) + g(x)$	
	$f(x) = x^3$ $g(x) = (x-1)^2$ $k(x) = f(x) + g(x)$	

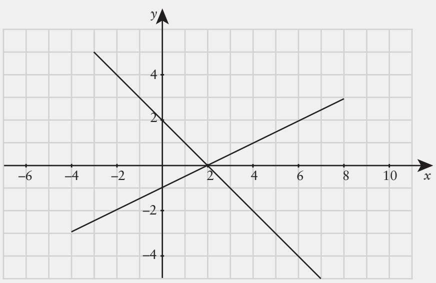
<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>$f(x) = x^3$
$g(x) = -(x-1)^2$
$k(x) = f(x) + g(x)$</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>$f(x) = x^3$
$g(x) = -x^2$
$k(x) = f(x) + g(x)$</td>
<td></td>
</tr>
</table>

Para el caso de la suma de una función cúbica con una cuadrática, a lo que se ha llamado "parábola más cúbica", se observa un patrón donde la parábola parece incrustarse en la gráfica de la función cúbica, aunque se vea muy tenue y con ello obtenemos formas cúbicas distintas a las que obtuvimos en capítulos anteriores. De este modo, si trabajamos una función cúbica de la forma $y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ se observa que contiene de forma explícita a una parábola. Más aún se puede decir que es la suma de una cúbica (Ax^3) con una parábola (Bx^2) con una recta (Cx) desplazada verticalmente D unidades. Al analizarlo de esa manera, se puede bosquejar la gráfica sin necesidad de tabular, usando únicamente gráficas de funciones prototípicas: $y = x$, $y = x^2$ y $y = x^3$.

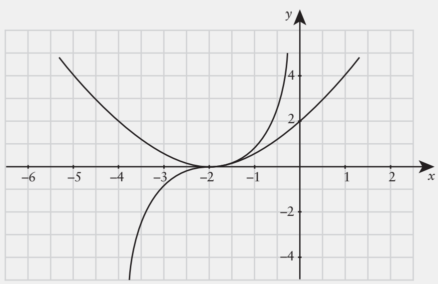
Actividad 5.1

1. Realiza la suma gráfica en los siguientes casos:

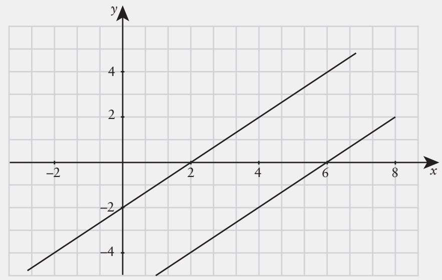
a)



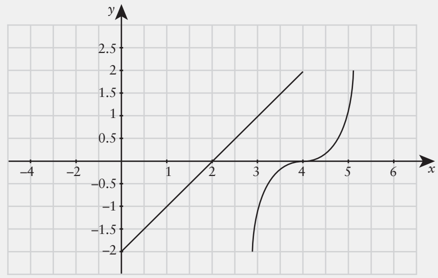
b)



c)



d)



2. Realiza la suma gráfica de las siguientes funciones. Comprueba tus bosquejos en GeoGebra.

   a) $y = y_1 + y_2 + y_3$ con $y_1 = x^3$, $y_2 = x^2$ y $y_3 = x$.

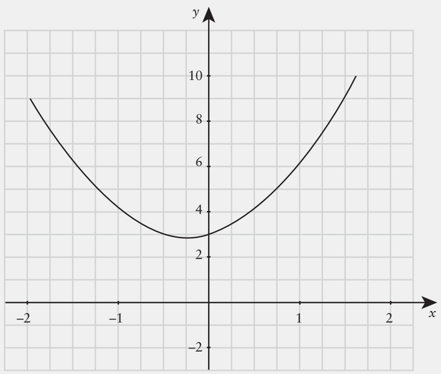
   b) $y = y_1 + y_2 + y_3$ con $y_1 = 0.5x^3$, $y_2 = 0.5x^2$ y $y_3 = 0.5x$.

   c) $y = y_1 + y_2 + y_3$ con $y_1 = 4x^3$, $y_2 = -2x^2$ y $y_3 = x$.

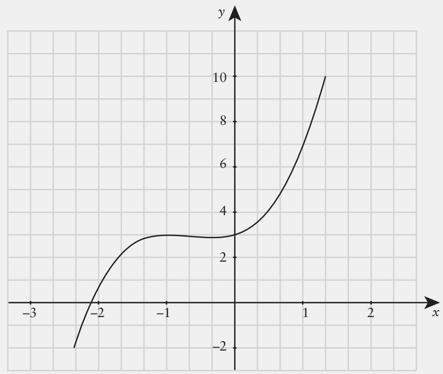
   d) $y = y_1 + y_2 + y_3$ con $y_1 = -2x^3$, $y_2 = 0.5x^2$ y $y_3 = -3x$.

3. Considerando que la función $y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ puede verse como una suma de funciones (como en el ejercicio anterior). Determina qué funciones al sumarse dan origen a las siguientes gráficas.

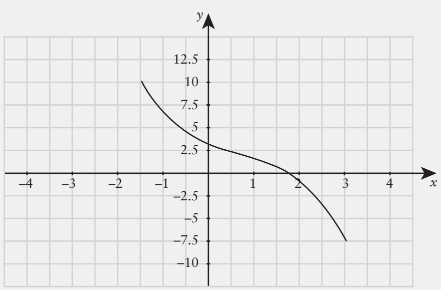
a)



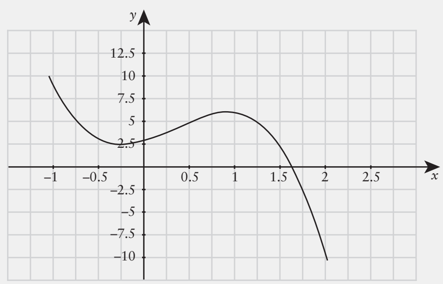
b)



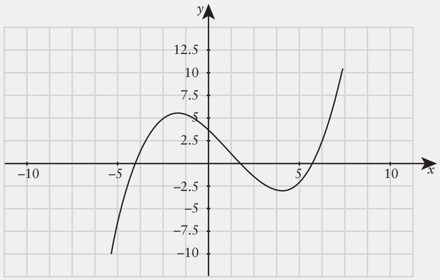
c)



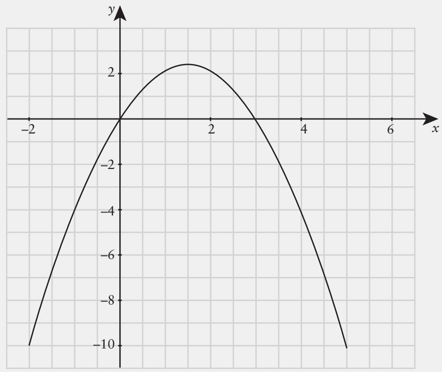
d)



e)



f)



4. Resuelve las siguientes sumas de manera gráfica.

   a) $5x^3 - 3x^2 + x$

   b) $0.5x^3 + x^2 - 2$

   c) $x^2 + 2x + 3$

   d) $-x^3 + 2x - 1$

   e) $x^2 + 2x - 2$

5. Coloca debajo de cada gráfica la función que le corresponda.

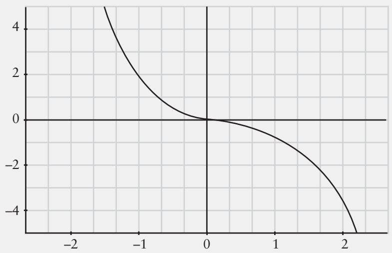
   a) $y = x^3 + x^2 + x$

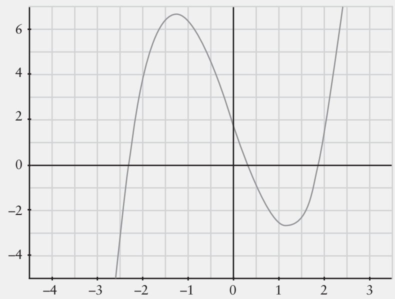
   b) $y = 2x^3 - 0.5x^2 + x - 2$

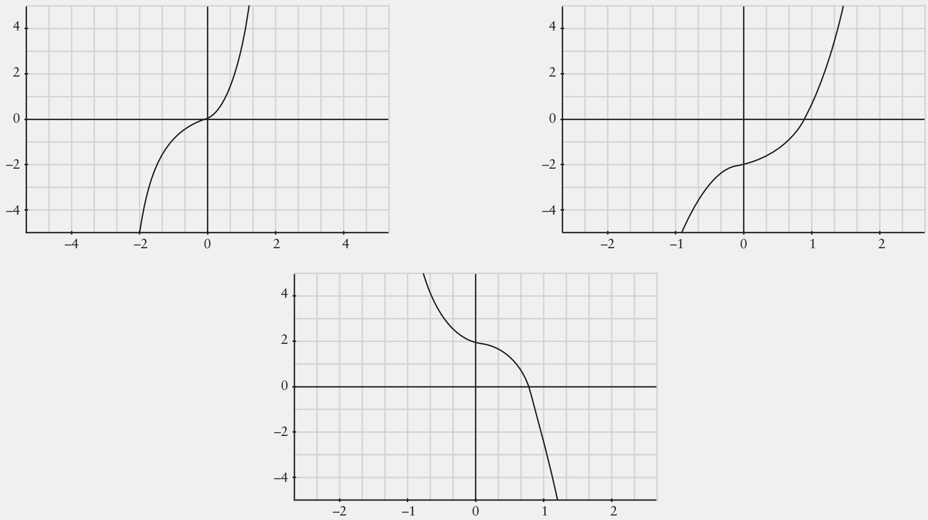
   c) $y = -x^3 + x^2 - x$

   d) $y = -5x^3 - 0.5x + 10$

   e) $y = 1.5x^2 - 6x + 2$







5.2 Multiplicación

5.2.1 Raíces de una función

Antes de comenzar con la multiplicación gráfica de funciones, es necesario hacer una pausa para analizar ciertas características que se han mostrado, pero no se han hecho explícitas en los capítulos anteriores. Hasta ahora, se ha trabajado con funciones prototipo de la forma $y = x^n$ con $n = 1, 2, 3$ y con base en transformaciones se han obtenido variaciones gráficas de las mismas. Un punto importante ahora consiste en señalar que si $n > 3$, las gráficas no cambian su forma, sólo la rapidez de su crecimiento. Analicemos esto con gráficas en movimiento. Comencemos el análisis para n par. Para ello, en GeoGebra, se debe definir un deslizador "n" con las características indicadas en la figura 5.12 y ajusta la ventana de la vista gráfica según la figura 5.13.

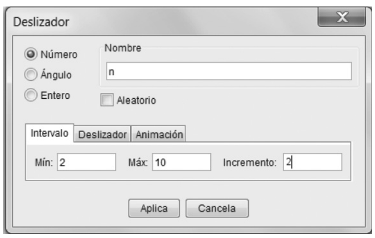


Figura 5.12 Etiqueta de un deslizador.

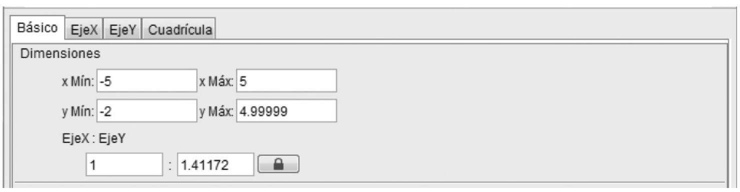
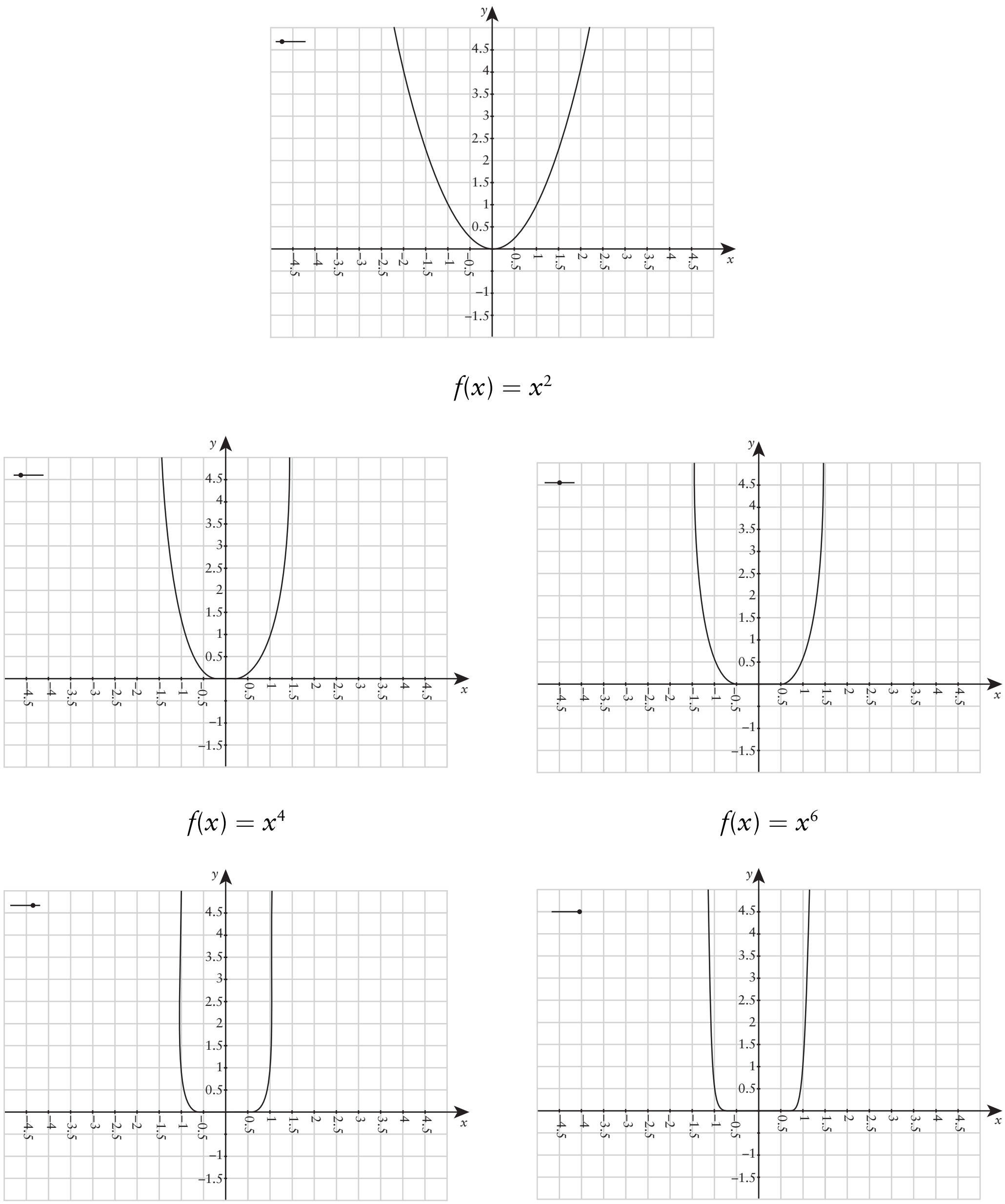


Figura 5.13 Ventana de "Vista Gráfica" en GeoGebra.

Posteriormente define la función $f(x) = x^n$ en la línea de edición y pulsa Enter. Las gráficas que obtendrás, al variar el deslizador, serán como las que se muestran en la figura 5.14:



$f(x) = x^2$

$f(x) = x^4$

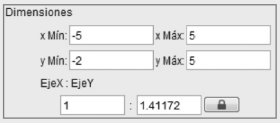
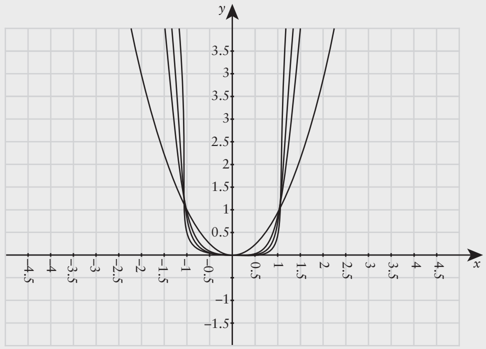
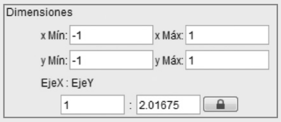
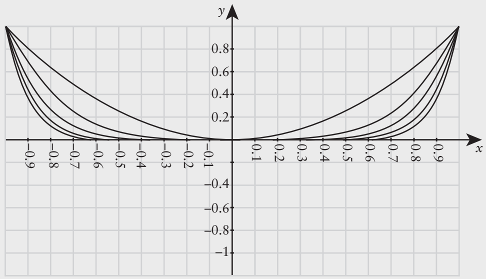
$f(x) = x^6$

$f(x) = x^8$

$f(x) = x^{10}$

Figura 5.14 Representación gráfica de $f(x) = x^2$ cuando $n = 2, 4, 6, 8$ y 10.

Ahora observemos todas las gráficas juntas en dos intervalos distintos, tal como se muestra a continuación:

Ventana	Gráfica
	
	

Se puede ver que, en el intervalo de $[-5, 5]$, mientras más grande sea el exponente, más rápido crecen las ordenadas de la parábola. Sin embargo, en el intervalo $(-1, 1)$, mientras más grande sea el exponente, la parábola se acerca más al eje x, es decir, es más pequeño su crecimiento. Lo que explica que la parábola se aplane en el intervalo dado, en la medida que el exponente crece.

Para analizar el caso $y = x^n$ con n impar se hará lo mismo, se define el deslizador y ventana como se muestra en la figura 5.15:

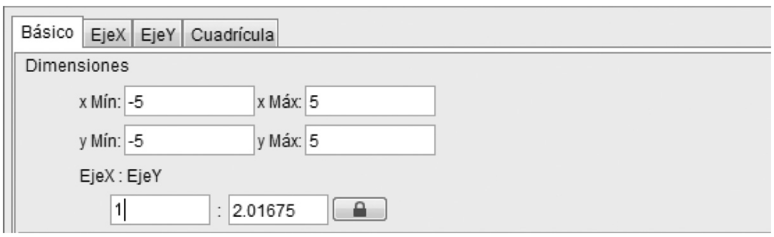
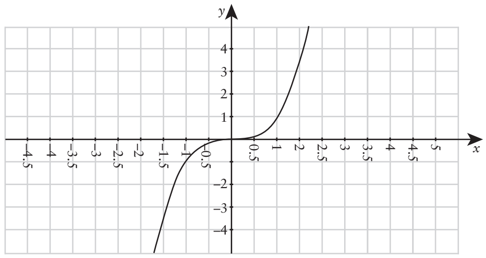
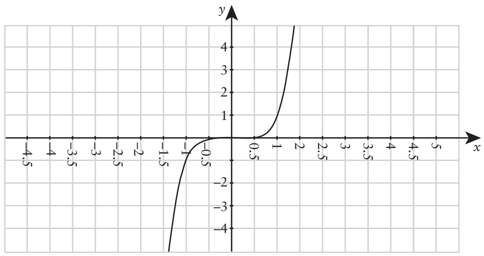


Figura 5.15 "Vista gráfica" de GeoGebra para determinar $y = x^n$.

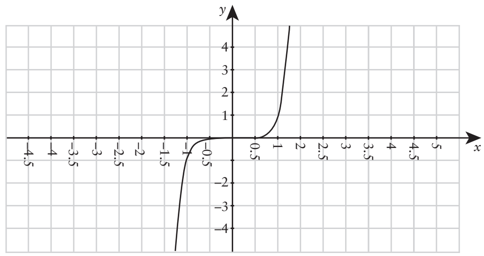
La sucesión de gráficas se muestra en la figura 5.16:



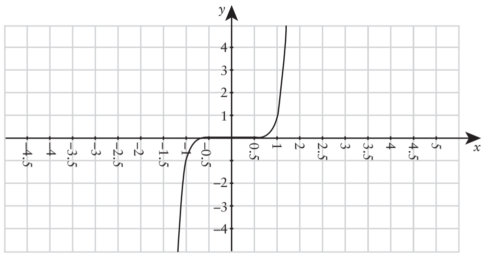
$f(x) = x^3$



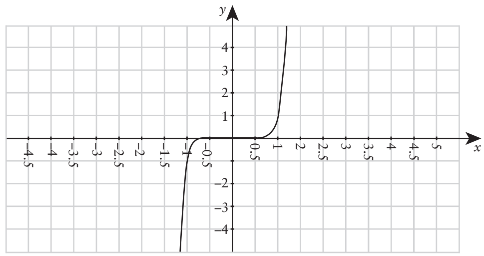
$f(x) = x^5$



$f(x) = x^7$



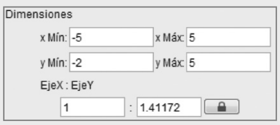
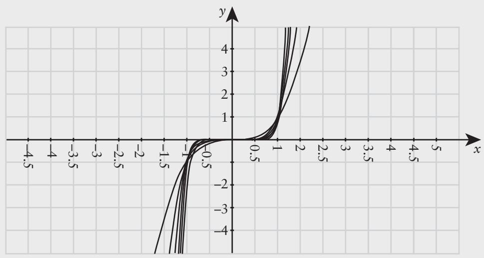
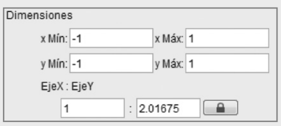
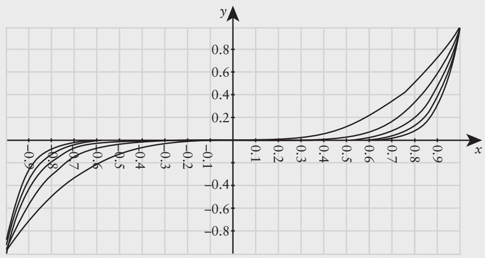
$f(x) = x^9$



$f(x) = x^{11}$

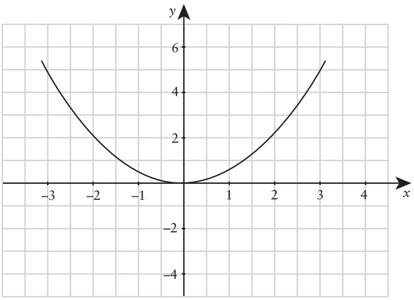
Figura 5.16 Representación gráfica de $f(x) = x^n$ cuando $n = 3, 5, 7, 9$ y 11.

Ahora observemos todas las gráficas juntas en dos intervalos distintos.

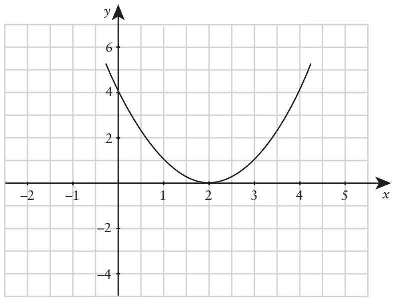
<table>
<tr><th>Ventana</th><th>Gráfica</th></tr>
<tr><td>
</td><td></td></tr>
<tr><td>
</td><td></td></tr>
</table>

Al igual que con n par, en la función $y = x^n$ con n impar las ordenadas crecen con mayor rapidez en la media que el exponente aumenta. Sin embargo, en el intervalo $(-1, 1)$ quien crece más rápido es $y = x^3$.

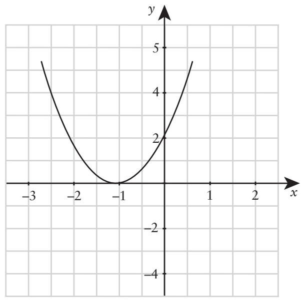
¿Qué pasa ahora con la función $y = a(x + b)^n$? Como se ha visto anteriormente, el parámetro a abre o cierra la gráfica cuando se trata de n par, y la estira o la comprime cuando se trata de n impar. El parámetro b provoca un desplazamiento horizontal de la gráfica para cualquier valor de n. Esto quiere decir que la gráfica sigue tocando el eje x de la misma manera que $y = x^n$, veámoslo gráficamente (figura 5.17).



$y = 0.5x^2$



$y = (x - 2)^2$



$y = 2(x + 1)^2$

Figura 5.17 Representación gráfica de $y = a(x + b)^n$.

En caso de que el valor de n fuera cualquier otro número entero ocurriría exactamente lo mismo, puedes comprobarlo al graficar algunos casos en GeoGebra. Lo importante es ver cómo cortan o cruzan al eje x estas gráficas. Por ejemplo, para una función $f(x)$ su gráfica se puede analizar de la siguiente forma (figura 5.18):

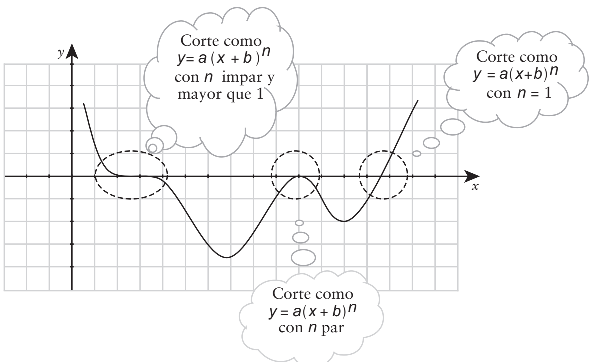


Figura 5.18 Raíces de una función.

Si $f(x)$ es una función cualquiera y a un valor constante que satisface $f(a) = 0$, entonces a recibe el nombre de raíz de la función $f(x)$. Es decir:

$$\frac{f(a)}{(x-a)} = P(x)$$

o bien:

$$f(a) = P(x)(x-a)$$

Sin embargo, a podría ser raíz de $P(x)$ y en este caso se tendría:

$$P(x) = (x-a)Q(x)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-a)(x-a)Q(x) \\ &= (x-a)^2 Q(x) \end{aligned}$$

lo que significa que a es una raíz de multiplicidad 2. Sin embargo, podría darse el caso de que a fuera raíz de $Q(x)$ y entonces la función f se definiría de la siguiente forma:

$$f(x) = (x-a)^3 R(x)$$

Así, se podría seguir con la multiplicidad n de la raíz a, pero ya hemos visto que las características de las raíces de la función $f(x) = (x - a)^n$ dependen de la paridad de n. Sin embargo, no podemos olvidar las funciones P, Q y R que se encuentran multiplicando a f en los distintos casos. Es ahora cuando se comienza a analizar la multiplicación gráfica de funciones.

5.2.2 Recta × recta

La función $y_1 = x^2$ se puede obtener por medio de una multiplicación, es decir, interpretándola como $y_1 = x \cdot x$. Pensemos en la gráfica de la función $y_2 = x$ (figura 5.19).

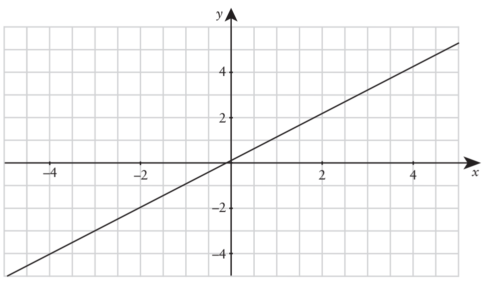


Figura 5.19 Representación gráfica de la función $y_2 = x$.

Si en el primer cuadrante la función y_2 es positiva y la multiplicamos por sí misma, el resultado será positivo. Por otra parte, en el tercer cuadrante la función y_2 es negativa y al multiplicarse por sí misma, el resultado será positivo. Por lo tanto, la función y_1 se encontrará en el primer y segundo cuadrantes, además, si se piensa en $y_1 = x \cdot x$, tenemos una raíz de multiplicidad dos en la coordenada (0, 0). Con lo anterior, es claro que la gráfica presenta una forma de parábola (figura 5.20):

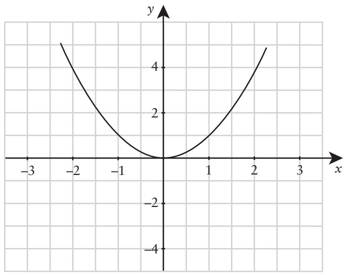


Figura 5.20 Representación gráfica de la función $y_2 = x^2$.

Analicemos ahora rectas de la forma $y = ax + b$. Por ejemplo, para graficar $y = (x - 2)(x - 4)$, se comienza por graficar las rectas en el plano, analizar ciertas regiones, y por último hacer un bosquejo de la gráfica multiplicación (figura 5.21).

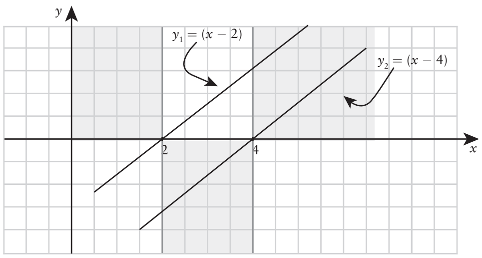


Figura 5.21 Análisis de una función por regiones.

Una vez que se grafican las rectas por separado se localizan sus raíces, se pueden marcar líneas perpendiculares al eje x (como en la figura 5.21) para marcar las regiones de análisis. Se puede resumir el análisis en los siguientes puntos:

- Hasta antes de la raíz $x = 2$ ambas rectas son negativas, por lo tanto, su producto será positivo. Se sombrea la parte positiva.
- Entre las raíces $x = 2$ y $x = 4$ una recta es positiva y otra es negativa, por lo tanto, su producto es negativo. Se sombrea la parte negativa.
- Después de la raíz $x = 4$ ambas rectas son positivas, por lo tanto, su producto es positivo. Se sombrea la parte positiva.
- Tanto la raíz $x = 2$ como $x = 4$ son de multiplicidad 1, por lo tanto, su cruce con el eje x es de una recta.

Un bosquejo de la gráfica multiplicación se muestra en la figura 5.22.

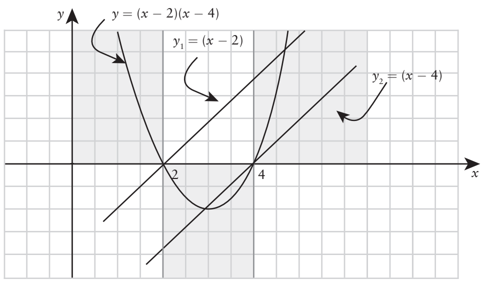


Figura 5.22 Multiplicación de dos rectas mediante el análisis de regiones.

Analicemos otro ejemplo gráfico como el que se muestra en la figura 5.23.

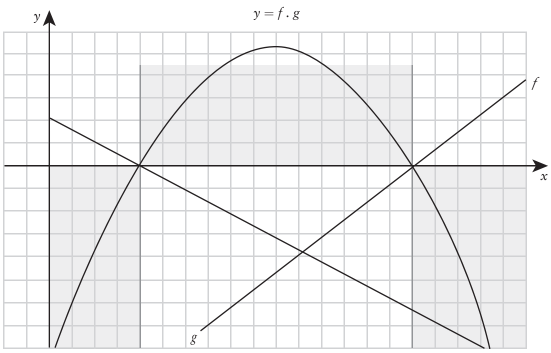


Figura 5.23 Multiplicación de dos funciones mediante análisis de regiones.

En estos ejemplos es importante analizar las características analíticas de las funciones involucradas. Por ejemplo, en el primer caso se multiplicaron dos rectas con pendiente positiva y como resultado obtuvimos una parábola que abre hacia arriba. En el segundo caso una de las rectas tiene pendiente negativa y provoca que el resultado sea una parábola que abre hacia abajo. ¿Cómo será la parábola resultante de una multiplicación de dos rectas cuya pendiente es negativa?, se pueden hacer pruebas en lápiz y papel, y posteriormente en GeoGebra, a fin de comprobar las hipótesis.

5.2.3 Recta × recta × recta

El análisis por regiones se puede usar en cualquier tipo de multiplicación. Analizaremos ahora la multiplicación gráfica de 3 rectas (figura 5.24).

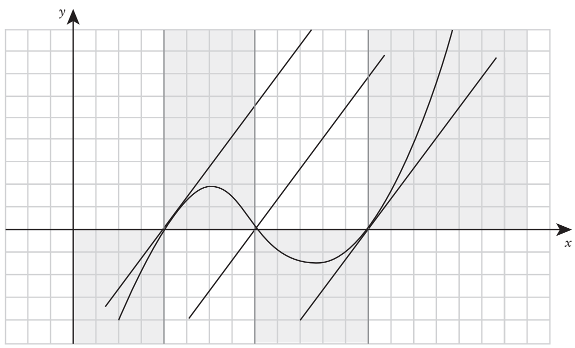


Figura 5.24 Multiplicación de 3 rectas mediante el análisis de regiones.

Multiplicar 3 rectas equivaldría a multiplicar una parábola por una recta. Esto es, multiplicamos dos rectas y obtenemos una parábola, y posteriormente multiplicamos por la recta restante.

5.2.4 Recta × parábola

En este caso tenemos una recta (una raíz) y una parábola con dos raíces distintas, donde ninguna de las raíces de la parábola es igual a la raíz de la recta, por lo tanto, la gráfica producto será una cúbica con 3 raíces distintas (figura 5.25). Esta forma cúbica no se obtiene con el método de las transformaciones, ahora se sabe cual es una de las operaciones que la propicia.

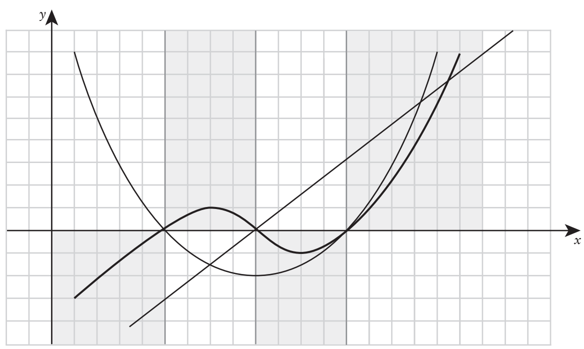


Figura 5.25 Multiplicación recta × parábola mediante el análisis de regiones.

¿Qué pasaría si una raíz de la parábola fuera la misma que la raíz de la recta, o la parábola tuviera raíz de multiplicidad 2? Observa los ejemplos de la figura 5.26:

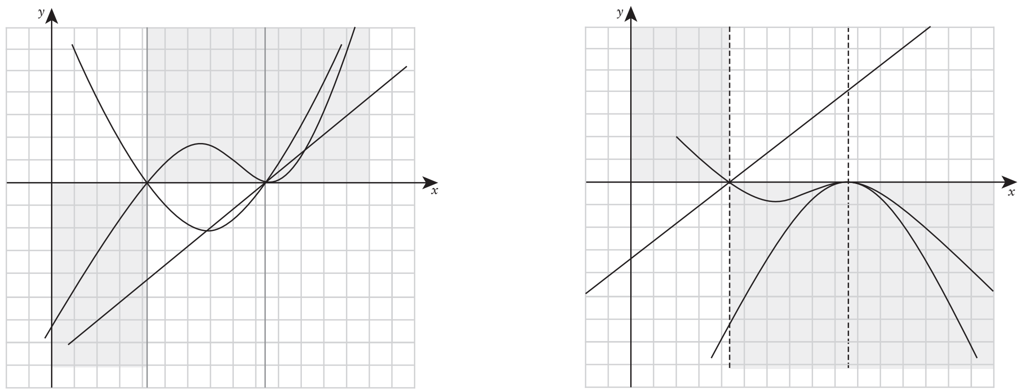


Figura 5.26 Multiplicación de recta *x* parábola con raíces iguales.

5.2.5 Generalización

Este criterio para multiplicar la gráfica de varias funciones es el mismo para cualquier función. Sólo se debe poner atención en los siguientes aspectos:

- Cruces de la gráfica de la función con el eje x. Es decir, raíces de la función.
- Multiplicidad de las raíces.
- Regiones en el plano. Es decir, si es positiva o negativa.

Sin embargo, si se ha de graficar una función definida de la forma $y = \pm\,(x-a)^o\,(x-b)^p\,(x-c)^q\,(x-d)^r\ldots$ no es necesario hacer gráficas por separado y multiplicar posteriormente. Si después de hacer tantas multiplicaciones gráficas se ha logrado tener una visualización de dicho proceso se sabrá que lo importante es identificar las raíces y su multiplicidad. Por ejemplo, observemos el siguiente caso:

Raíz de multiplicidad 1

Raíz de multiplicidad 3

$$y = (x-2)(x-3)^2\,(x-5)^3$$

Raíz de multiplicidad 2

La representación gráfica de la función anterior se ve como lo muestra la figura 5.27.

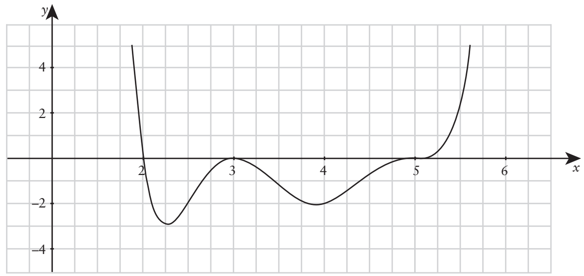


Figura 5.27 Representación gráfica de raíces de multiplicidad 1, 2 y 3.

Observa, que las raíces y su multiplicidad son lo que le da forma a la gráfica. Al cambiar las multiplicidades de las raíces, se tiene que:

Raíz de multiplicidad 1

Raíz de multiplicidad 5

$$y = (x - 2)(x - 3)^4 (x - 5)^5$$

Raíz de multiplicidad 4

La representación gráfica correspondiente tiene una forma singular (figura 5.28), observa que el intervalo es el mismo que en el caso anterior.

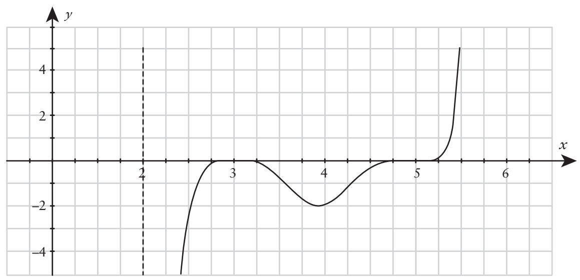


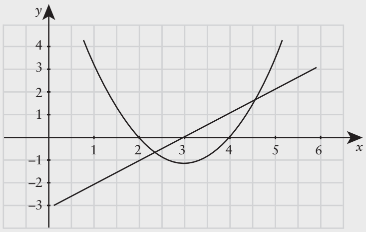
Figura 5.28 Representación gráfica de raíces de multiplicidad 1, 4 y 5.

Quizá ahora, después de analizar ejemplos de cómo analizar una función gráficamente, sin dejar de lado el aspecto numérico y analítico de dicho objeto, queda claro que la visualización es un proceso que permite vincular, relacionar y transitar entre distintas representaciones del concepto *función*. Aunque queda una operación más, que provocará la aparición de nuevos conceptos.

Actividad 5.2

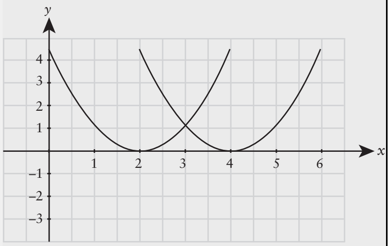
1. Realiza la multiplicación gráfica de las siguientes funciones:

a)

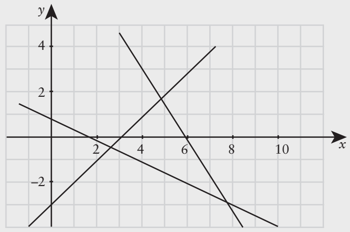


b)

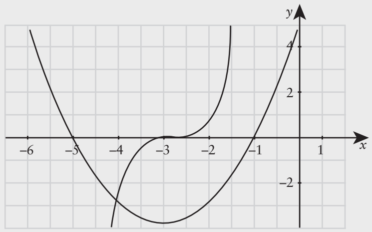
c)



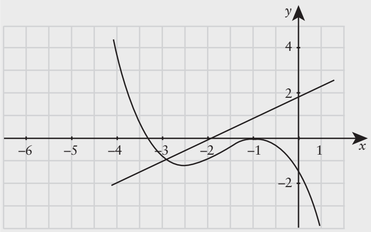
d)



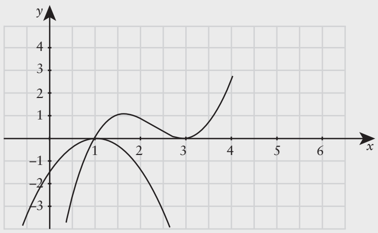
e)



f)

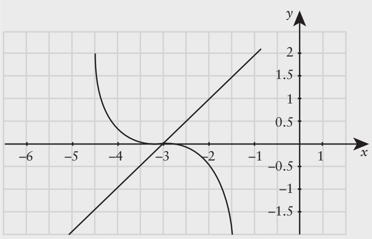


g)

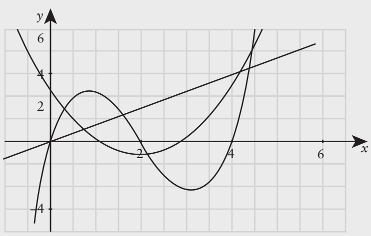


h)

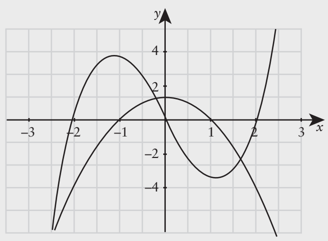
i)



j)



k)



l)

2. Bosqueja las siguientes funciones, sin hacer operaciones gráficas. Comprueba tus conjeturas en GeoGebra.

   a) $y = (x - 2)^2 (x - 4)^3$

   b) $y = (x + 1)^3 (x - 2)$

   c) $y = x(x + 1)(x - 2)^2$

   d) $y = -x^2(x + 4)(x - 2)^2$

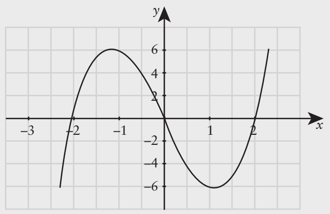
   e) $y = 0.5x^2(5 - x)(4 - x)$

   f) $y = x^3(3 - x)(x + 2)$

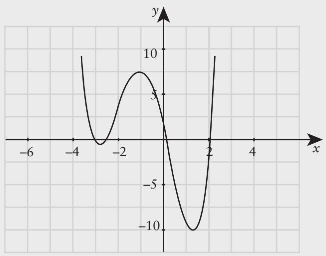
   g) $y = -0.5x(x + 6)(x - 2)$

3. Propón una fórmula para cada una de las siguientes gráficas. Comprueba tus conjeturas en GeoGebra.

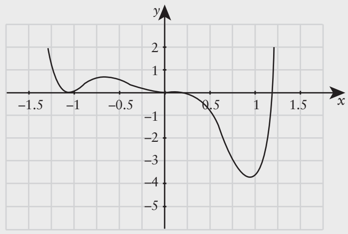
a)



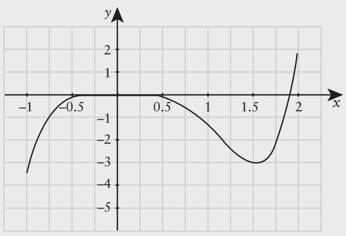
b)



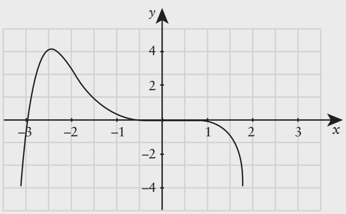
c)



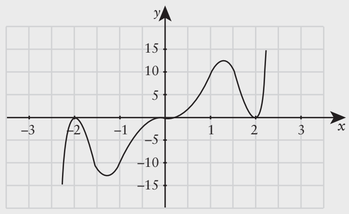
d)



f)



g)



4. Elabora una guía para construir la gráfica de la función $y = (x - a)^m (x - b)^n (x - c)^p$.

5. Elabora una guía para construir la fórmula de la función de la forma $y = (x - a)^m (x - b)^n (x - c)^p$ a partir de su gráfica.

5.3 División

En esta sección no se hará un análisis tan sistemático como en los casos anteriores, se analizarán las características más importantes de la operación división y se hará entonces una generalización detallada. Sin embargo, es conveniente empezar, como en las secciones anteriores, por los casos sencillos.

Por ejemplo, el caso de la división de dos rectas. Comencemos tomando las rectas $y_1 = 1$ y $y_2 = x$ y su cociente $y = y_1/y_2$. Si analizamos las dos funciones gráficamente tenemos (figura 5.29):

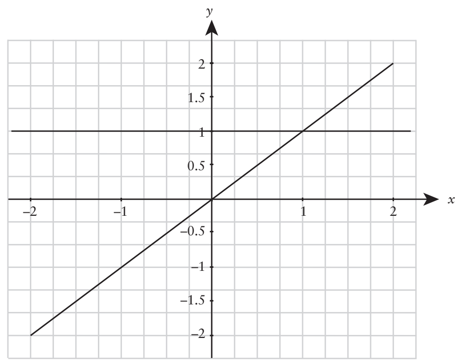


Figura 5.29 Representación gráfica de las funciones que componen el numerador y el denominador, $y = y_1/y_2$.

Para obtener el cociente de estas gráficas se utiliza el análisis de las regiones para averiguar en qué zona del plano se encontrará el cociente. Por ejemplo, en el caso anterior para $x < 0$ la función constante $y_1 = 1$ es positiva (de hecho siempre lo es) y la función $y_2 = x$ es negativa, por lo tanto, el cociente será negativo. En cambio para $x > 0$, ambas funciones son positivas, por lo tanto, su cociente será positivo. En esta operación es fundamental localizar las raíces del denominador, en tanto que se sabe que la división entre cero produce una indeterminación y por consiguiente se provocará una asíntota vertical, cuando no ocurra que en el mismo punto también hay un cero en el numerador. Observemos la gráfica correspondiente al cociente de este ejemplo (figura 5.30):

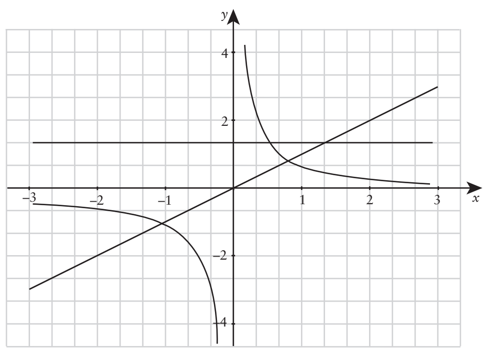
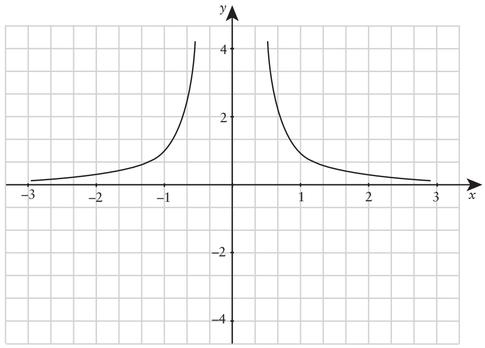


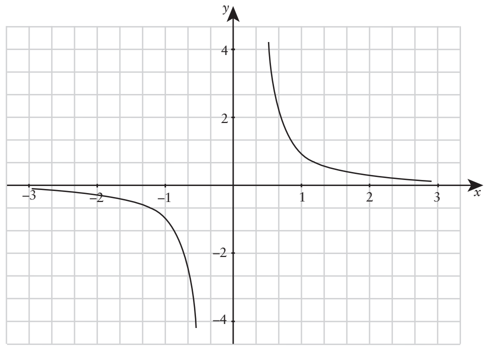
Figura 5.30 Representación gráfica del cociente $y = \dfrac{1}{x}$.

No se debe olvidar que aun cuando estemos operando gráficamente, la exploración numérica es una herramienta poderosa para establecer comportamientos gráficos. En este ejemplo, una exploración numérica de $y = \dfrac{1}{x}$ alrededor de cero muestra el comportamiento asintótico de la función.

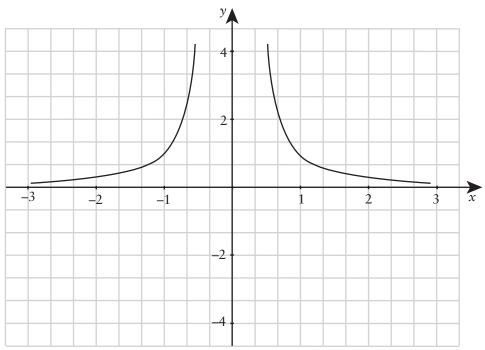
Analicemos distintos cocientes, $y = \dfrac{1}{x^n}$, para n = 2, 3, 4 y 5, y encontremos un patrón (figura 5.31).



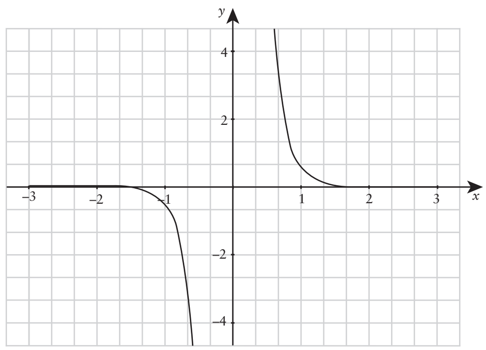
$$y = \frac{1}{x^2}$$



$$y = \frac{1}{x^3}$$



$$y = \frac{1}{x^4}$$



$$y = \frac{1}{x^5}$$

Figura 5.31 Representación gráfica del cociente $y = \dfrac{1}{x^n}$ para n = 2, 3, 4 y 5.

Sin embargo, el cociente podría ser de la forma $y = \dfrac{A}{(x+B)^2}$. Entonces, lo que se hace es transformar, como en el capítulo 4, las primitivas que se identificaron con anterioridad. Ahora bien, estos pueden ser los cocientes más sencillos. Pensemos en nuestro cociente como una función racional de la forma:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$ y $Q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_0$.

Analicemos un ejemplo sencillo, en el que se pueda emplear el análisis de las regiones.

$$f(x) = \frac{x(x-2)^2}{(x+1)(x-3)^2}$$

Primero, se localizan gráficamente (figura 5.32), las raíces del numerador (gráficas de línea continua), que se convertirán en raíces del cociente y las raíces del denominador (gráficas de línea punteada) que se convertirán en asíntotas verticales del cociente.

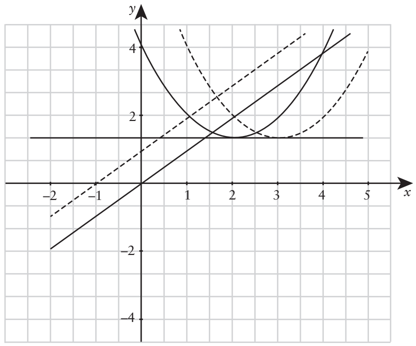


Figura 5.32 Raíces del numerador (línea continua) y denominador (línea punteada).

Observa ahora la gráfica del cociente (figura 5.33).

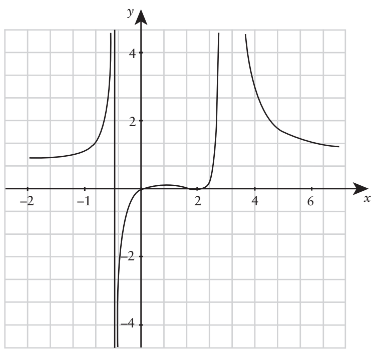


Figura 5.33 Función racional con dos asíntotas.

Analicemos otro ejemplo, como se hizo con anterioridad, a través de sus raíces y asíntotas, para generalizar algunas de sus características y hacer un análisis global.

La función a analizar es:

$$f(x) = \frac{x(x+3)^2(x-2)^3}{(x+1)(x-3)}$$

Se debe graficar el numerador por partes, es decir, primero la función $y_1 = x$, después $y_2 = (x + 3)^2$ y, por último, $y_3 = (x - 2)^3$ (figura 5.34) y la gráfica del numerador (figura 5.35). Después se seguirá un proceso similar con el denominador (figura 5.36)

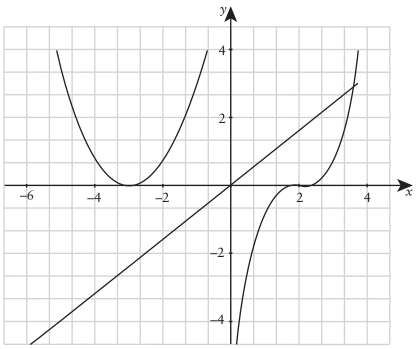


Figura 5.34 Funciones que componen el numerador.

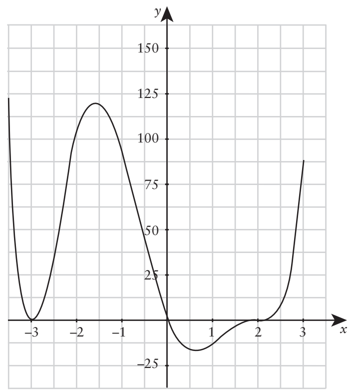


Figura 5.35 Gráfica del numerador.

Es importante señalar que las raíces de esta función seguirán siendo las raíces del cociente. No así, las raíces del denominador, como ya se había mencionado. Observemos ahora la gráfica de las funciones que conforman al denominador (figura 5.36) y al denominador (figura 5.37).

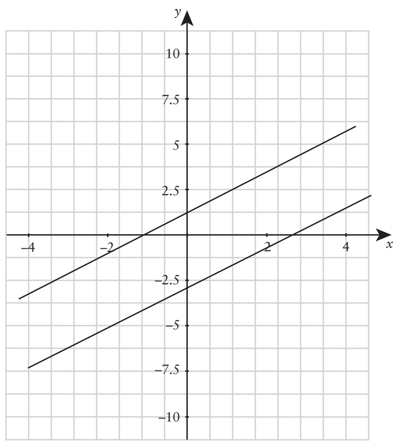


Figura 5.36 Funciones que componen al denominador.

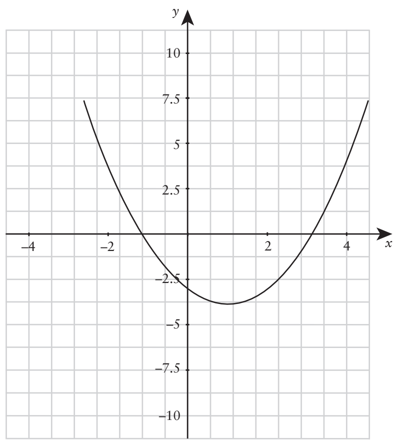


Figura 5.37 Gráfica del denominador.

En el caso del denominador, sus raíces se convierten en asíntotas verticales en el cociente, debido a la no existencia de la división entre cero. Por último, la gráfica del cociente se muestra en la figura 5.38.

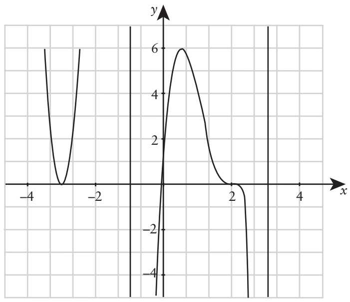
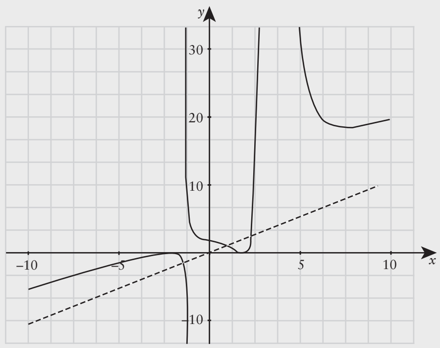
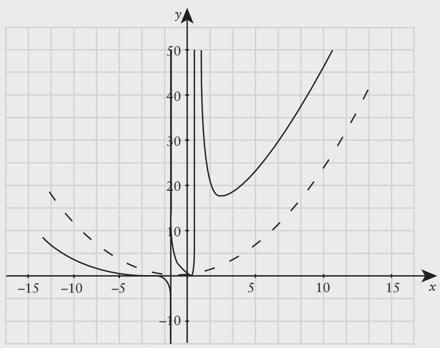
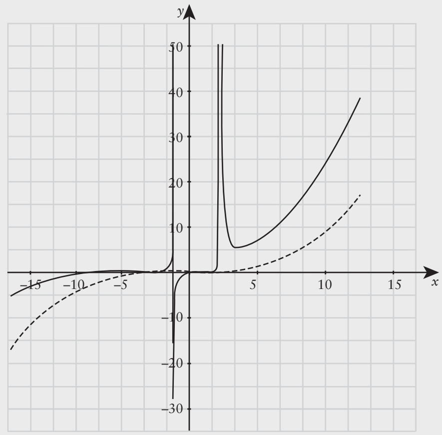


Figura 5.38 Representación gráfica del cociente $f(x) = \dfrac{x(x+3)^2(x-2)^3}{(x+1)(x-3)}$.

Observa como las raíces del numerador se mantienen ($x = -3$, $x = 0$ y $x = 2$) cada una con su multiplicidad, y las raíces del denominador se convierten en asíntotas verticales (líneas rectas verticales en $x = -1$ y $x = 3$).

Hasta ahora se han analizado algunas características locales de funciones racionales, producto de la división de dos polinomios. Sin embargo, tienen un comportamiento global diverso. Observa las siguientes gráficas (figura 5.39):

	$y^1 = \dfrac{(x+2)^2(x-2)^2}{(x+1)(x-3)^2}$ la función $y_2 = x$ es la línea punteada.
	$y_1 = 0.05\dfrac{(x+5)^3(x-2)^2}{(x+1)(x-3)^2}$ la función $y_2 = 0.05x^2$ es la línea punteada.



$$y_1 = 0.05\frac{(x+5)^3(x-2)^3}{(x+1)(x-3)^2}$$

la función $y_2 = 0.005x^2$ es la línea punteada.

Figura 5.39 Ejemplos característicos de funciones racionales.

Observa que la gráfica se comporta de manera global, o en sus extremos, de formas muy significativas. Esto tiene que ver con los grados de ambos polinomios, el numerador y el denominador. Por ejemplo, en el primer caso tenemos un numerador de grado cuatro y un denominador de grado tres, por lo que al efectuar la operación división obtendremos un cociente de grado uno. A la larga, hacia el infinito (negativo o positivo), la gráfica de la función se comportará como una función lineal.

Al observar cuidadosamente, notamos que el comportamiento de la gráfica de la función racional no es idéntico al de la gráfica de la línea punteada, sin embargo, nos permite tener una aproximación en el bosquejo de gráficas.

Actividad 5.3

1. Realiza un bosquejo de gráfica para las siguientes funciones. Compara tus bosquejos con las gráficas obtenidas en GeoGebra, en caso de tener diferencias significativas expresa tus conjeturas al respecto.

a) $y = \dfrac{5(x+2)^3(x-1)^4}{(4x+8)^2(5-x)^2}$

b) $y = \dfrac{x-1}{x}$

c) $y = \dfrac{x(x-1)}{x-2}$

d) $y = \dfrac{x(x-1)^1(x+1)^3(x^2+1)}{(x-3)(x+2)^2(x-2)^3}$

2. Partiendo de las funciones primitivas (y sus gráficas antes vistas)

$$y=\frac{1}{x},\ g=\frac{1}{x^2},\ h=\frac{1}{x^3}$$

realiza los bosquejos de gráficas de las siguientes funciones a través de sus transformaciones.

a) $f=\dfrac{1}{(x+2)^2}$

b) $f=\dfrac{5}{x-4}$

c) $f=\dfrac{1}{6x+6}-3$

d) $f=\dfrac{1}{3(x-4)^2}$

e) $f=\dfrac{0.5}{(x+2)^3}+5$

3. Analiza las siguientes familias de funciones en GeoGebra, proponiendo distintos valores a n. Explica el efecto local y global de dicho parámetro en cada función.

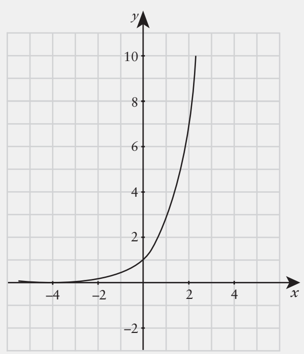
$$y=\frac{x^n(x-1)}{(x-2)}$$

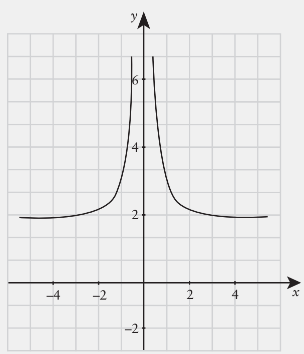
$$y=\frac{x(x-1)^n}{(x-2)}$$

$$y=\frac{x(x-1)}{(x-2)^n}$$

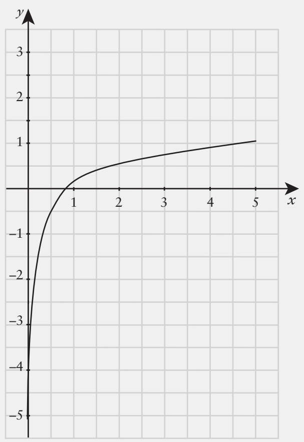
Sugerencia: puedes utilizar las gráficas dinámicas, con una ventana adecuada, para que puedas apreciar de forma más clara dicho efecto.

4. Indica cuál de las siguientes gráficas puede corresponder a la gráfica de una función racional y cuál no. Explica tus razones.

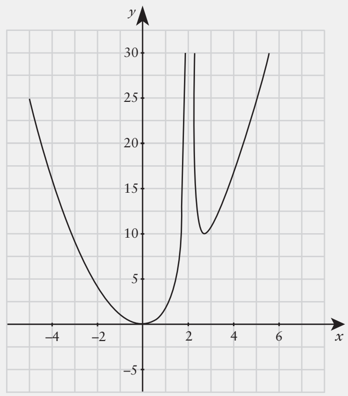




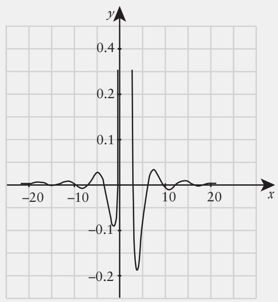
Gráfica 1



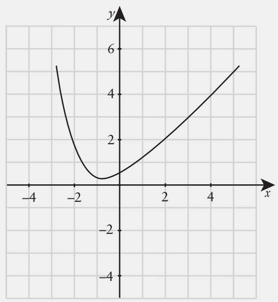
Gráfica 2



Gráfica 3



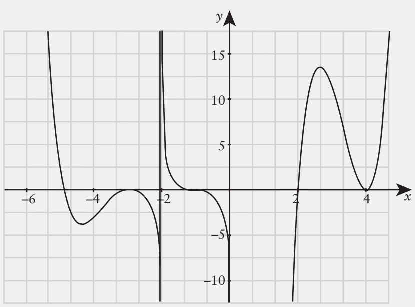
Gráfica 4



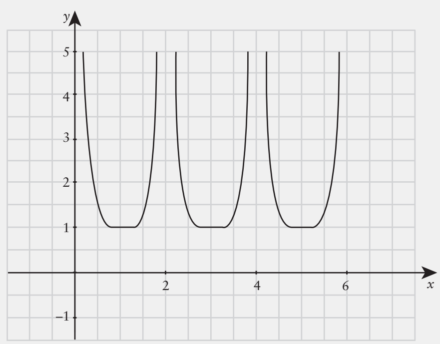
Gráfica 5

Gráfica 6

5. Construye una expresión analítica cuya gráfica pueda corresponder con cada una de las siguientes gráficas.



Racional 1



Racional 2

Verifica tus conjeturas en GeoGebra.

Capítulo 6

MÉTODO DEL ANÁLISIS MATEMÁTICO

Como se ha visto en los capítulos precedentes, es posible reconocer patrones en los comportamientos de las gráficas de las funciones. Particularmente, se ha estudiado una gama amplia de funciones algebraicas; nos hemos centrado en las funciones polinomiales y en las funciones racionales. El objetivo ha sido construir un universo de formas gráficas en los lectores. La idea ha sido siempre, que la visualización adquiera un nivel adecuado para permitir interpretar conceptos y procesos matemáticos del cálculo, precálculo y análisis matemático.

En este capítulo se buscará cerrar el ciclo que abrieron los anteriores, al ocuparnos de estudiar las gráficas de funciones algebraicas desde una perspectiva novedosa, analizar a las funciones algebraicas como compuestas con monomios de la forma $f(x) = ax^n$, para n natural; o bien, formadas por factores del tipo $A(x - b)^j$. Queremos de esta manera aproximarnos, mediante la visualización, a las funciones analíticas.

Como sabemos, las funciones analíticas son aquellas que pueden expresarse mediante una serie de potencias, es decir, si consideramos que la función f está definida sobre un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{R}$, decimos que f es analítica sobre Ω, si para todo $a \in \Omega$, existe una vecindad U de a en Ω, y una sucesión $\{a_n\}$ de números reales tales que para todo $x \in U$, la serie

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i (x-a)^i,$$

converge a $f(x)$. En tal caso decimos que $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (x-a)^i$ sobre Ω.

Este resultado teórico se presenta en los cursos de análisis matemático y en los de cálculo avanzado; sin embargo, el tratamiento habitual inhibe aspectos de la visualización de las funciones analíticas. Por ejemplo, cuestiones sobre ¿cómo se conforma la serie?, ¿qué papel juegan los coeficientes de los sumandos?, ¿qué significado se asocia a los monomios involucrados? O bien, ¿qué significado visual tiene la convergencia de la serie? Con estas cuestiones y con otras más, se pretende plantear a lo largo de este capítulo, una reflexión de corte didáctico para las funciones analíticas. La cual se hará desde una perspectiva que se considera novedosa, ya que se apoya en resultados recientes de la investigación sobre procesos de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas como éstos suelen ser abordados en la Matemática Educativa.

Como se dijo anteriormente, las funciones analíticas son aquellas que pueden expresarse mediante una serie de potencias. Esto, para el caso particular de $a = 0$, significa que f es analítica en una vecindad $a = 0$, si la serie

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i,$$

converge hacia $f(x)$ en una vecindad de a. Se dice en tal caso que $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$.

Empecemos con el estudio de funciones de la forma $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$, $f_3(x) = x^3$, ..., $f_n(x) = x^n$ para $n = 1, 2, 3, ...$, que son aquellas que componen la serie anterior. Todas ellas, como se ha visto a lo largo de este libro, tienen curvas representativas cualitativamente semejantes entre sí; por ejemplo, si se centra la atención en las regiones del plano que ocupan sus gráficas, veremos que alternativamente, pasan de los cuadrantes 1 y 3, a los cuadrantes 1 y 2. La forma global de las gráficas también manifiesta una regularidad, pues se observa que son alternativamente funciones pares y funciones impares.

Para mostrar las gráficas e iniciar con su estudio, elegimos una misma ventana de visualización (figura 6.1), tomando los valores de (x,y) que están en el rectángulo $-4 \leq x \leq 4$, $-2 \leq y \leq 2$, las representaciones se resumen en la tabla 6.1.

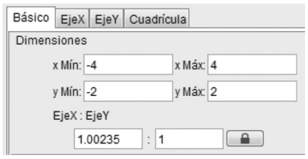
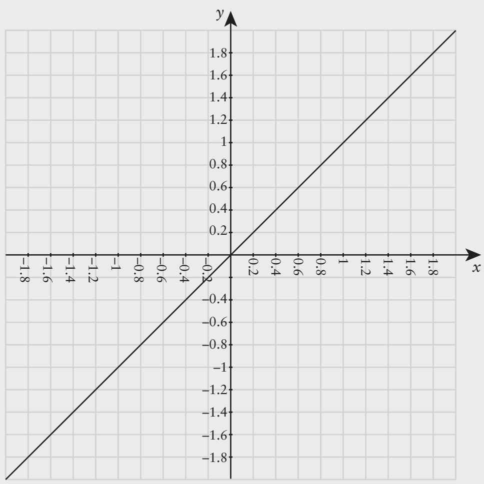
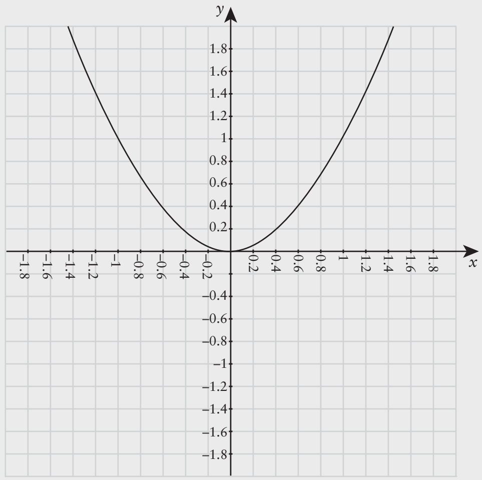
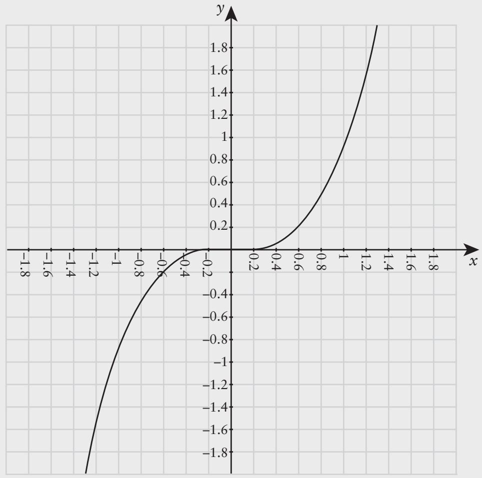
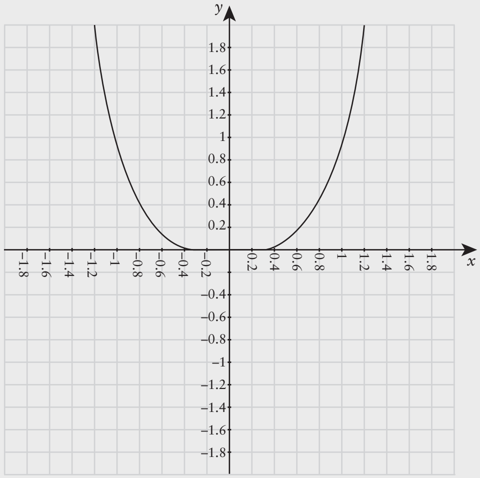
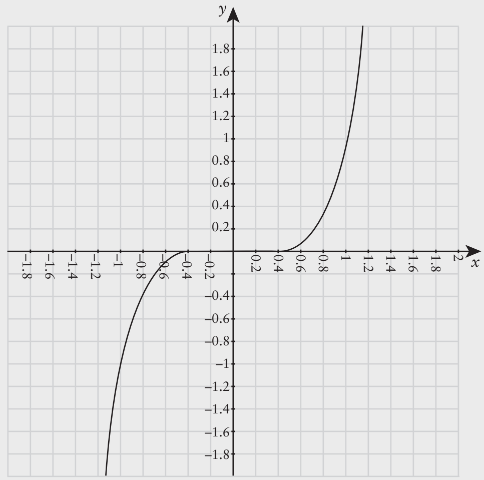
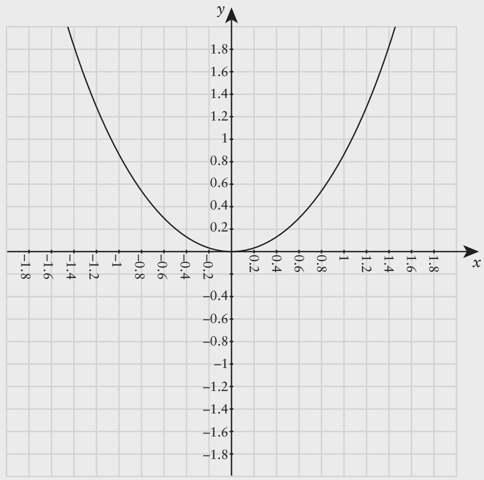
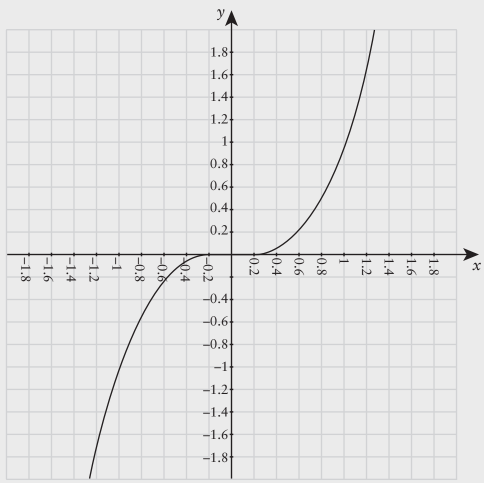


Figura 6.1 Ventana de visualización.

Tabla 6.1 Representación gráfica de funciones de la forma x^n

$f_1(x) = x$	

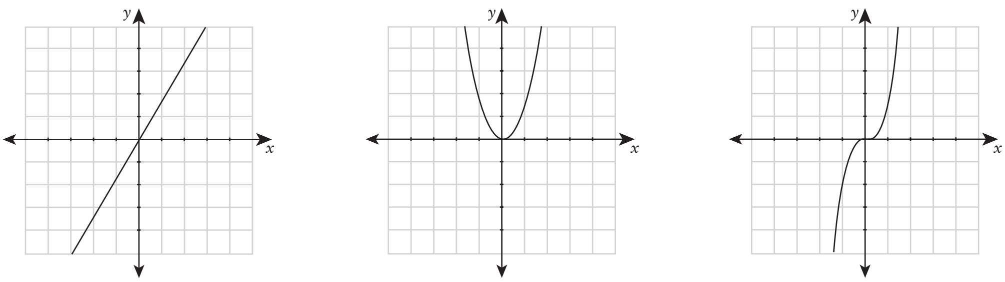
$f_2(x) = x^2$	
$f_3(x) = x^3$	
$f_4(x) = x^4$	

$f_5(x) = x^5$	
$f_n(x) = x^n$ Para n par	
$f_{\text{n}}(x) = x^n$ Para n impar	

Algunas observaciones sobre el comportamiento de la familia de funciones $f_n(x) = x^n, n = 1, 2...$ han sido discutidas en el capítulo anterior. Como conclusión, se puede decir que las funciones cuya fórmula esté dada por monomios de la forma x^{2n} son funciones pares y sus gráficas serán simétricas respecto del eje y, mientras que las funciones de la forma x^{2n+1} son impares y su gráfica es simétrica respecto del origen.

De igual forma se observa que las gráficas tienen formas particulares de contacto con el eje x, y en consecuencia, se obtuvo una caracterización de la naturaleza múltiple de sus raíces. Por lo tanto, las funciones $y = x$, $y = x^2$ y $y = x^3$ tienen una, dos y tres raíces en $x = 0$, respectivamente.

Este resultado permite argumentar sobre por qué aunque todas las gráficas se intersecan con el eje x en un punto, todas lo hacen de maneras completamente diferentes. Observemos las gráficas de la figura 6. 2.



$y = x$ — *a*) La recta cruza al eje x.

$y = x^2$ — *b*) La curva toca al eje x.

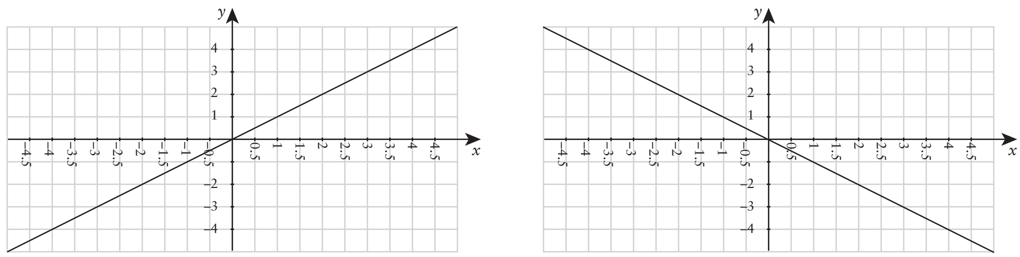
$y = x^3$ — *c*) La curva toca y cruza al eje x.

Figura 6.2 Representación gráfica de la intersección de la función $f(x) = x^n$ con el eje x.

En general, una función cuya fórmula esté dada por $f(x) = x^{2n}$ tendrá $2n$ raíces en $x = 0$, es decir, tiene una raíz en cero de multiplicidad $2n$. Equivalentemente $f(x) = x^{2n+1}$, tiene $2n + 1$ raíces en $x = 0$, o dicho de otro modo, tiene en cero una raíz de multiplicidad $2n + 1$.

De modo sintético, se dice que las curvas representativas que provengan de graficar a las funciones $f(x) = x^n$ tienen una forma particular de contacto con el eje x, es decir, tienen un contacto de orden 1, si cruzan al eje en un punto como la hace la recta $y = x$ (figura 6.2a). Decimos que tienen un contacto de orden 2, si toca al eje x como lo hace la parábola $y = x^2$ (figura 6.2b), el contacto será de orden 3, si la curva toca al eje x como lo hace la curva $y = x^3$ (figura 6.2c).

Por otra parte, como se vio en capítulos anteriores, los coeficientes a_n de los monomios $a_n x^{2n}$ afectan la forma de su gráfica en dos sentidos, en términos de la orientación de la curva respecto del eje x y en relación de la *abertura* de la curva. De tal forma que si x es una función creciente, la función $-x$ es decreciente. Analicemos su representación gráfica de la figura 6.3.

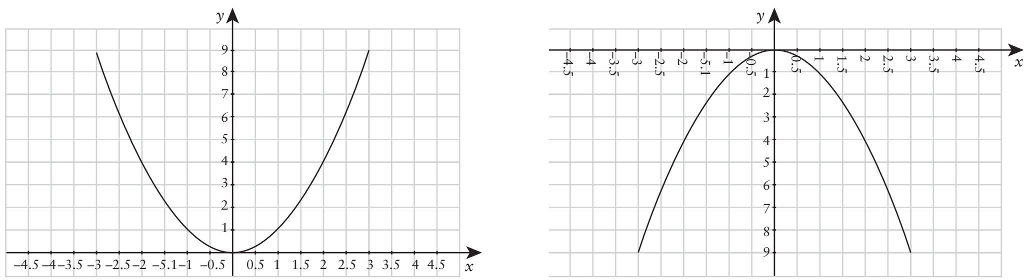


$y = x$ $\qquad\qquad$ $y = -x$

a) $\qquad\qquad$ *b*)

Figura 6.3 Efecto del parámetro A sobre la curva $y = \pm Ax$.

Equivalentemente, las parábolas $f(x) = x^2$ y $g(x) = -x^2$ tienen, entre sí, gráficas simétricas con relación al eje x, lo que se verifica analíticamente, ya que $f(x) = -g(x)$ (figura 6.4).



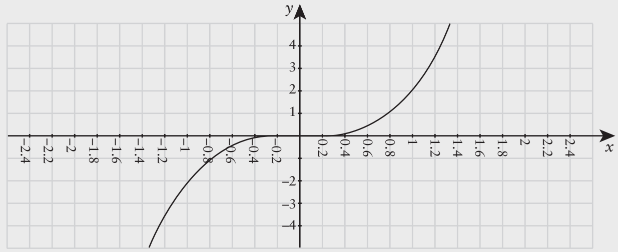
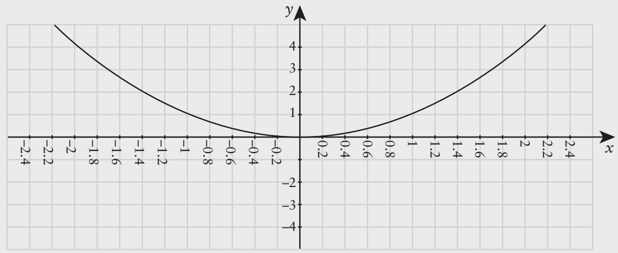
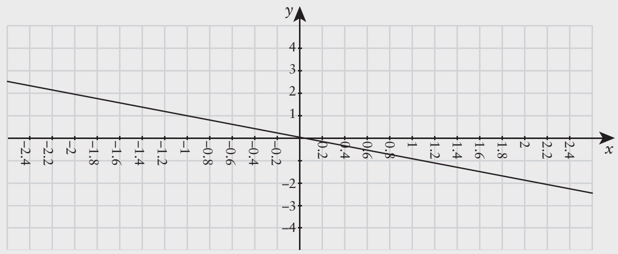
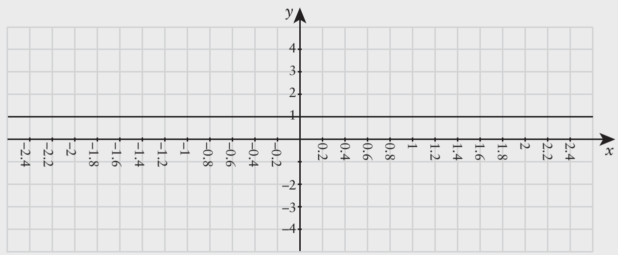
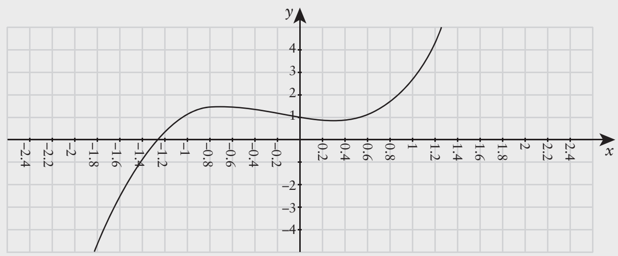
$f(x) = x^2$ $\qquad\qquad$ $g(x) = -x^2$

a) $\qquad\qquad$ *b*)

Figura 6.4 Efecto del parámetro A sobre la curva $y = \pm Ax^2$.

De modo que una expresión de la forma $f(x) = 2x^3 + x^2 - x + 1$, no es sino la suma de monomios $2x^3$, x^2, $-x$, 1, por lo tanto se podrá discutir la forma de su gráfica al saber las formas de las gráficas de sus sumandos, ¿puedes hacerlo? En nuestra opinión, la visualización permite justamente responder afirmativamente a cuestiones como la anterior. Analicemos esta condición a través de la tabla 6.2. A la derecha se presentan las gráficas de las funciones de la forma ax^n, al final de la tabla, se muestra la suma de dichas funciones. En este punto, es de interés, analizar visualmente las propiedades de la función particular $f(x) = 2x^3 + x^2 - x + 1$ (figura 6.5).

Tabla 6.2 Visualización de los sumandos y de la suma $f(x) = 2x^3 + x^2 - x + 1$

Gráfica de $y_1 = 2x^3$	
Gráfica de $y_2 = 2x^2$	
Gráfica de $y_3 = -x$	
Gráfica de $y_4 = 1$	
Gráfica de $y = 2x^3 + x^2 - x + 1$	

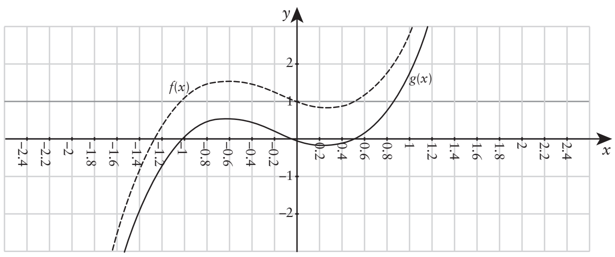


Figura 6.5 Visualización de $f(x) = 2x^3 + x^2 - x + 1$ (curva punteada), como $f(x) = g(x) + 1$.

Centremos la atención en el comportamiento de la gráfica cerca del cero, así como en el papel que desempeña la suma el factor $y = 1$, es decir, analicemos el aspecto de la gráfica de f para valores de x próximos a 0. El punto $(0, 1)$ pertenece a la gráfica de f, para verificar se evalúa la función en dicho punto, tenemos:

$$f(0) = 2(0)^3 + (0)^2 - (0) + 1 = 1,$$

la curva cúbica está *sobre* el punto (0, 1), ello se debe a la contribución del factor $y = 1$ en la suma de los términos, así $f(x) = 2x^3 + x^2 - x + 1$ se puede mirar como $f(x) = g(x) + 1$. Donde, naturalmente $g(x) = 2x^3 + x^2 - x$. Si ahora, centramos la atención en el factor lineal de $f(x)$, es decir, la suma de los términos $-x$ y 1, $y = -x + 1$ y lo graficamos en el mismo sistema coordenado que utilizamos para graficar a la función f, tendremos como resultado la gráfica que se muestra en la figura 6.6.

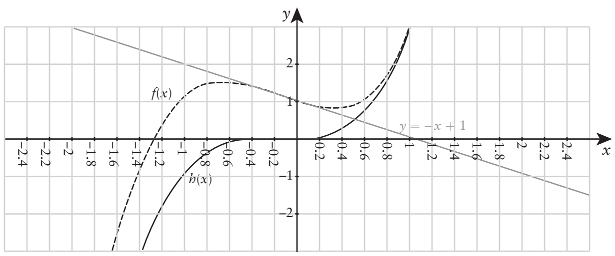


Figura 6.6 Visualización de $f(x) = 2x^3 + x^2 - x + 1$ (curva punteada), como $f(x) = h(x) - x + 1$.

Al analizar la figura 6.6, se observa que la recta $y = -x + 1$, sirve de *apoyo* a la gráfica de $f(x) = 2x^3 + x^2 - x + 1$, ambas tienen en común al punto (0, 1) y la recta es tangente a la curva en dicho punto. En estos términos, la función $f(x) = 2x^3 + x^2 - x + 1$ se puede escribir como $f(x) = h(x) - x + 1$, donde $h(x) = 2x^3 + x^2$. Se observa que en la medida que se van agregando términos primero fue el 1, luego el $-x + 1$, enseguida seguirá el $x^2 - x + 1$ y finalmente la expresión completa $2x^3 + x^2 - x + 1$, la gráfica seguirá creciendo. En cada caso se presentan fenómenos similares, es decir, se tiene una gráfica que sirve de *apoyo* a la gráfica de la función completa. Observemos la figura 6.7.

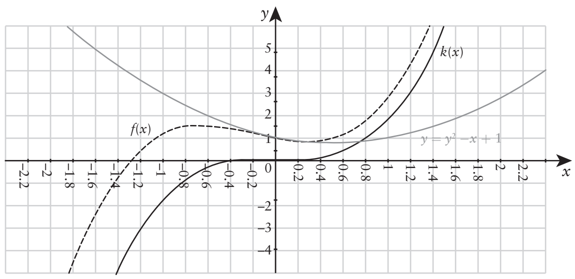


Figura 6.7 Visualización de $f(x) = 2^3 + x^2 - x + 1$ (curva punteada), como $f(x) = k(x) + x^2 - x + 1$.

En cada caso, el punto $(0, 1) = (0, f(0))$ ha sido el pivote sobre el cual se apoyan las gráficas sucesivas que se han construido; del mismo modo, la recta, $y = -x + 1$, fue la recta pivote sobre la cual se construye la función f, y la curva $y = x^2 - x + 1$ es la parábola sobre la cual se construye la función f. Así, la función $f(x) = 2x^3 + x^2 - x + 1$ puede escribirse como $f(x) = k(x) + x^2 - x + 1$, donde $k(x) = 2x^3$. Al continuar de esta manera, se observa que en la medida que se agregan monomios, primero el 1, luego $-x + 1$, enseguida $x^2 - x + 1$ y finalmente $2x^3 + x^2 - x + 1$, en cada ocasión tenemos comportamientos similares, pues una gráfica sirve de *apoyo* a la gráfica de la función completa.

Lo que se ha podido observar en este ejemplo, constituye un poderoso resultado en análisis matemático, que consiste en afirmar que si una función arbitraria f es analítica, entonces tendrá asociada una sucesión de funciones polinomiales cuyas gráficas estarán cada vez más cerca de la gráfica de la función en torno de un punto y sus términos servirán de *apoyo* a ésta en las proximidades de dicho punto.

El ejemplo que se desarrolló anteriormente, analizó el comportamiento gráfico de los sumandos $2x^3$, x^2, $-x$, y 1 de la función $f(x) = 2x^3 + x^2 - x + 1$. Cada elemento influyó de alguna manera en la forma final de la gráfica de f. Esta misma situación se tendría al trabajar sobre una función polinomial arbitraria $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, pues la curva representativa de f, se apoyará en el origen, como se vio en el ejemplo anterior, en el punto $(0, a_0)$, es decir, en el punto $(0, f(0))$. Después, al incrementar el grado del polinomio de apoyo, la curva representativa de la función f se apoyará en la recta $y = a_1 x + a_0$ en las proximidades del 0. Siguiendo con este patrón, la gráfica de f se apoyará en la parábola $y = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, y así sucesivamente.

Este resultado puede generalizarse para funciones no polinomiales, de modo que las curvas representativas de las funciones racionales, radicales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas directas e inversas, pueden ser obtenidas mediante secuencias adecuadas de curvas polinomiales simples. Aquí, radica la potencia del método analítico de análisis de las funciones, pues casi cualquier función de las que se trabajan en el ámbito escolar, tendrá asociada una sucesión de funciones polinomiales que la aproximan adecuadamente en una cierta vecindad. La importancia práctica de este resultado salta a la vista, pues en vez de trabajar directamente con la función f, se hará mediante sus aproximaciones polinomiales.

Con el ejemplo anterior, se pudo visualizar el efecto que tienen los monomios de una expresión polinomial en la forma final de la gráfica. El caso que elegimos trató con la función $f(x) = 2x^3 + x^2 - x + 1$, en este caso, todos los términos que componen al polinomio son factores monomiales de la forma $a_n x^n$, es decir, la función f es la suma de los monomios $2x^3$, x^2, $-x$ y 1. De ahí que se pudiera discutir su forma gráfica al estudiar las respectivas formas de las gráficas de sus sumandos. Como se dijo, la visualización permite responder afirmativamente a esas cuestiones, y ahora se propone hacer una extensión de este resultado, mostrando que este análisis no sólo se hace sobre el punto $(0, f(0))$, sino que se puede realizar sobre cualquier punto $(a, f(a))$ que se encuentre en el dominio de definición de la función. Por ejemplo, partamos de la consideración que toda expresión de la forma $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ puede rescribirse como una suma de potencias de $A_k\,(x-a)^k$, es decir, se desarrolla la serie en torno de $x = a$, en vez de $x = 0$ como se hizo en el ejemplo anterior.

De esta manera, al ejemplificar lo que estamos diciendo, se toma como punto de partida a la misma función $f(x) = 2x^3 + x^2 - x + 1$ que se trató en el ejemplo anterior, sólo que ahora, en lugar de desarrollarla alrededor de 0 lo haremos ahora, por ejemplo en torno del 1 (es decir, en esta ocasión tendremos $a = 1$). El problema inicia entonces con la siguiente pregunta:

¿Cuáles son los valores de A, B, C y D tales que $2x^3 + x^2 - x + 1 = A(x-1)^3 + B(x-1)^2 + C(x-1) + D$?

Una forma de responderlo, sería mediante la resolución de un sistema de ecuaciones que se obtiene al desarrollar las potencias del lado derecho de la igualdad anterior: $A(x-1)^3$, $B(x-1)^2$, $C(x-1)$ y D e igualarlas con las expresiones del lado izquierdo, es decir con $2x^3 + x^2 - x + 1$. En los libros de álgebra se presentan técnicas más sintéticas con las que se obtienen los mismos resultados. En virtud de que al momento, sólo nos interesa usar el resultado, diremos que los valores adecuados de A, B, C y D en este caso son 2, 7, 7 y 3, respectivamente. Es decir, que la función $f(x) = 2x^3 + x^2 - x + 1 = 2(x-1)^3 + 7(x-1)^2 + 7(x-1) + 3$. Conviene que verifiques esta afirmación algebraicamente antes de proseguir con la explicación. De modo que la expresión $2(x-1)^3 + 7(x-1)^2 + 7(x-1) + 3$ es igual con la original $2x^3 + x^2 - x + 1$, pero con la ventaja que ha sido escrita en potencias sucesivas del factor $x - 1$.

Iniciemos ahora con el análisis gráfico de la situación planteada, el punto será ahora no el (0, 1) sino el (1, 3). Recuerda que hace un momento graficamos a la función f y localizamos el punto sobre el eje y por el que cruzaba la gráfica de f.

Ahora, se localiza el punto sobre la recta paralela al eje y que pasa por $x = 1$. El punto (0, 1) proviene de considerar el punto de la gráfica $(0, f(0))$, ya que la función $f(x) = 2x^3 + x^2 - x + 1$, así $f(0) = 2(0)^3 + (0)^2 - (0) + 1 = 1$. Mientras que el punto (1, 3) proviene de evaluar a la función en $x = 1$, esto es $f(x) = 2x^3 + x^2 - x + 1$, así $f(1) = 2(1)^3 + (1)^2 - (1) + 1 = 2$

+ 1 − 1 + 1 = 3. O bien, equivalentemente $f(x) = 2(x-1)^3 + 7(x-1)^2 + 7(x-1) + 3$, de donde $f(1) = 2(1-1)^3 + 7(1-1)^2 + 7(1-1) + 3 = 3$. En síntesis, $(0, 1) = (0, f(0))$ como se ve en la figura 6.8 y $(1, 3) = (1, f(1))$ como se ve en la figura 6.9.

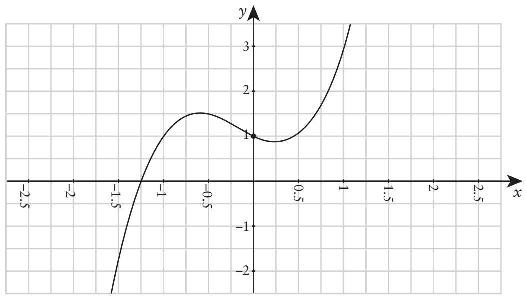


Figura 6.8 Gráfica de $f(x) = 2x^3 + x^2 - x + 1$. Recta vertical en $x = 0$.

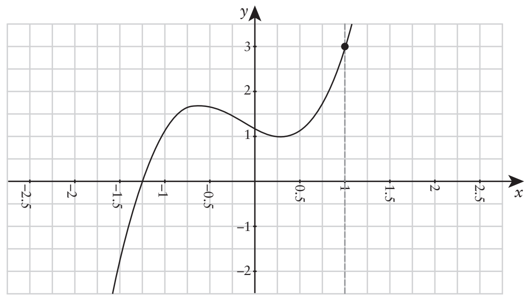
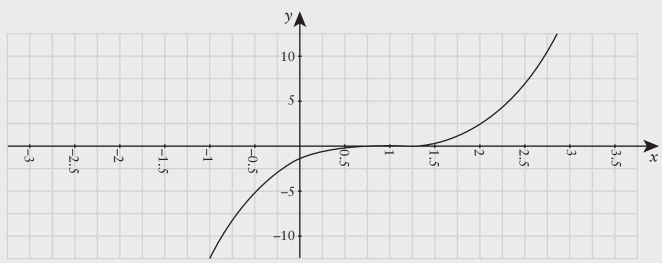
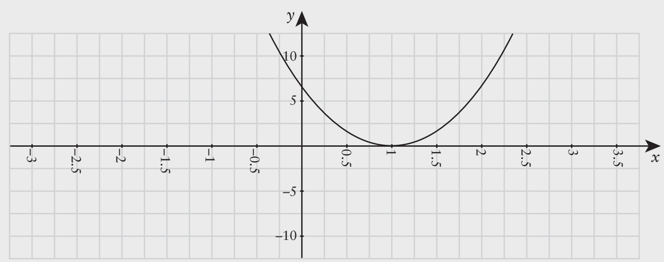
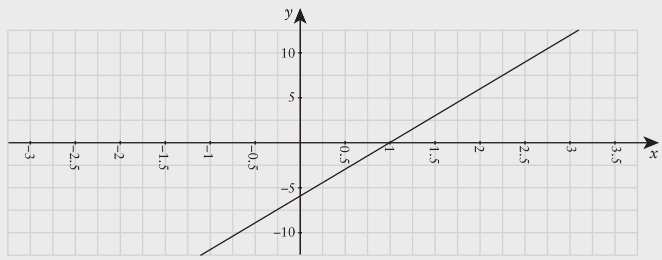
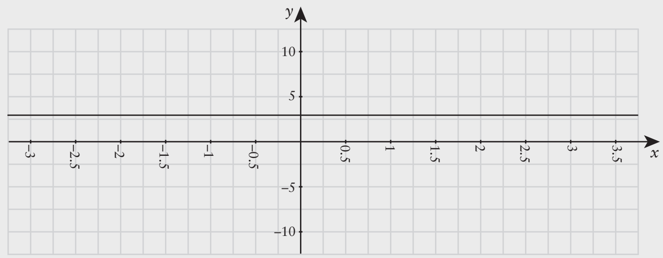
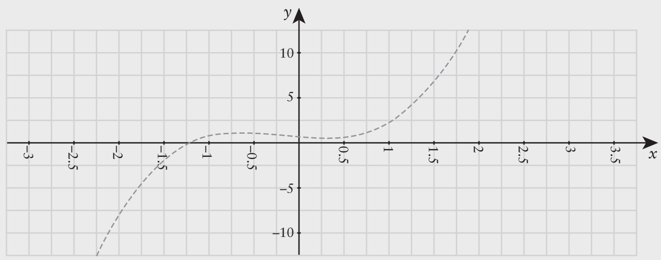


Figura 6.9 Gráfica de $f(x) = 2x^3 + x^2 - x + 1$. Recta vertical en $x = 1$.

Ahora estudiemos la descomposición en factores lineales de la forma $(x - 1)$ de la misma función f anterior. Analicemos esta condición a través de la tabla 6.3. A la derecha se presentan las gráficas de las funciones de la forma $a_n(x-1)^n$, al final de la tabla se muestra la suma de dichas funciones. Como dijimos en el ejemplo anterior, son los monomios y sus combinaciones los que darán la forma final de la gráfica de f. En este punto, es de interés analizar visualmente las propiedades de la función particular $f(x) = 2x^3 + x^2 - x + 1 = 2(x-1)^3 + 7(x-1)^2 + 7(x-1) + 3$ (figura 6.10).

Tabla 6.3 Visualización de los sumandos y de la suma $f(x) = 2(x-1)^3 + 7(x-1)^2 + 7(x-1) + 3$

Gráfica de $y_1 = 2(x-1)^3$	
Gráfica de $y_2 = 7(x-1)^2$	

Gráfica de $y_3 = 7(x - 1)$	
Gráfica de $y_4 = 3$	
Gráfica de $f(x) = 2(x-1)^3 + 7(x-1)^2 + 7(x-1) + 3$	

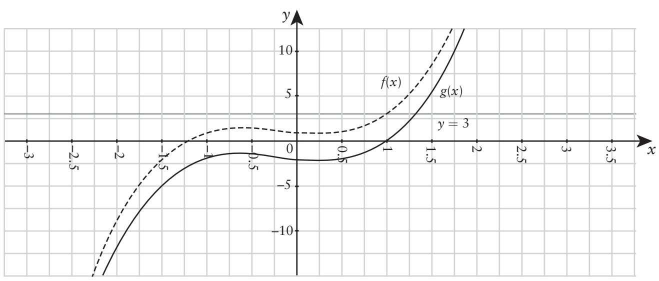


Figura 6.10 Visualización de $f(x) = 2(x - 1)^3 + 7(x - 1)^2 + 7(x - 1) + 3$, como $f(x) = g(x) + 3$.

Observemos el comportamiento cerca del uno y el papel que desempeña la suma en el factor $y = 3$, es decir, analicemos el aspecto de la gráfica de f para valores de x próximos a 1. El punto (1, 3) pertenece a la gráfica de f, si evaluamos a la función tendremos:

$$f(1) = 2(1)^3 + (1)^2 - (1) + 1 = 3$$

de modo que la curva cúbica está *sobre* el punto $(1, 3)$, ello se debe a la contribución del factor $y = 3$ en la suma de los términos, así $f(x) = 2(x-1)^3 + 7(x-1)^2 + 7(x-1) + 3$ se puede estudiar como $f(x) = g(x) + 3$. Donde, naturalmente $g(x) = 2(x-1)^3 + 7(x-1)^2 + 7(x-1)$.

Analicemos ahora, el factor lineal de $f(x)$, es decir, la suma de los términos $7(x-1)$ y 3, $y = 7(x-1) + 3$. Así $f(x) = 2(x-1)^3 + 7(x-1)^2 + 7(x-1) + 3$ se puede estudiar como $f(x) = h(x) + y$. Donde, naturalmente $h(x) = 2(x-1)^3 + 7(x-1)^2$. Al graficar en el mismo sistema coordenado que utilizamos para graficar a la función f, tendremos la gráfica que se muestra en la figura 6.11.

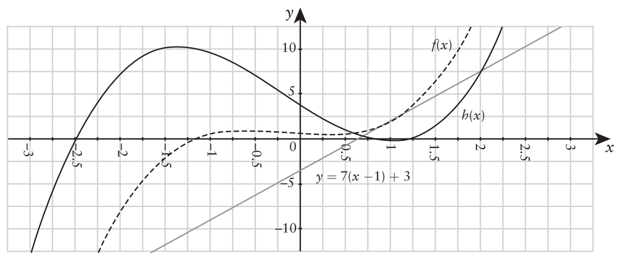


Figura 6.11 Visualización de $f(x) = 2(x-1)^3 + 7(x-1)^2 + 7(x-1) + 3$ como $f(x) = h(x) + 7(x-1) + 3$.

Como podemos apreciar, ahora la recta $y = 7(x-1) + 3$, sirve de apoyo a la gráfica de $f(x) = 2(x-1)^3 + 7(x-1)^2 + 7(x-1) + 3$, ambas tienen en común al punto $(1, 3)$ y además la recta es tangente a la curva en dicho punto. Si continuamos de esta manera, se verá que en la medida que se agregan términos a la expresión anterior, primero el 3, luego el $7(x-1) + 3$, enseguida el $7(x-1)^2 + 7(x-1) + 3$ y finalmente la expresión completa $2(x-1)^3 + 7(x-1)^2 + 7(x-1) + 3$ se tienen aproximaciones polinomiales de las funciones. En cada caso se presentan fenómenos similares, pues se tiene una gráfica que sirve de apoyo a la gráfica de la función completa. Observemos dicho fenómeno en la figura 6.12.

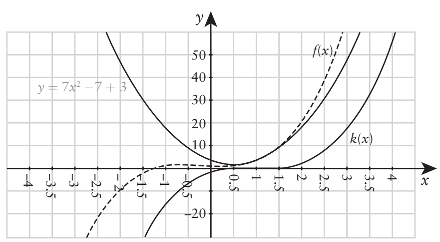


Figura 6.12 Visualización de $f(x) = 2(x-1)^3 + 7(x-1)^2 + 7(x-1) + 3$ como $f(x) = k(x) + 7(x-1)^2 + 7(x-1) + 3$.

En cada caso, el punto $(1, 3) = (1, f(1))$ ha sido el pivote sobre el cual se apoyan las gráficas sucesivas que se han construido; del mismo modo, la recta, $y = 7(x-1) + 3$, fue la recta

pivote sobre la cual se construye la función *f*, y la curva $y = 7(x-1)^2 + 7(x-1) + 3$ es la parábola sobre la cual se construye la función *f*. Así, la función $f(x) = 2(x-1)^3 + 7(x-1)^2 + 7(x-1) + 3$ puede escribirse como $f(x) = k(x) + 7(x-1)^2 + 7(x-1) + 3$, donde $k(x) = 2(x-1)^3$. Si continuamos de esta manera, se verá que en la medida que se agregan monomios, primero el 3, luego $7(x-1) + 3$, enseguida $7(x-1)^2 + 7(x-1) + 3$ y por último $2(x-1)^3 + 7(x-1)^2 + 7(x-1) + 3$, en cada ocasión tenemos fenómenos similares, pues una gráfica sirve de apoyo a la gráfica de la función completa.

Lo que hemos podido ver en éste y en el ejemplo anterior, constituye un poderoso resultado en análisis matemático, que consiste en afirmar que si una función arbitraria *f* es analítica, esta tendrá una sucesión de funciones polinomiales cuyas gráficas estarán "cada vez más y más cerca" de la gráfica de la función, y sus términos servirán de *apoyo* a la gráfica de la función.

El ejemplo inicial, sirvió para analizar el comportamiento gráfico de los sumandos $2(x-1)^3$, $7(x-1)^2$, $7(x-1)$, y 3 de la función $f(x) = 2(x-1)^3 + 7(x-1)^2 + 7(x-1) + 3$. Cada elemento influyó en la forma final de la gráfica de *f*. La misma situación se tendría al tomar una función polinomial arbitraria $f(x) = a_n(x-a)^n + \ldots + a_1(x-a) + a_0$, dado que la curva representativa de *f*, se apoyará en el origen, como en el ejemplo anterior, en el punto (a, a_0), es decir, en el punto de coordenadas $(a, f(a))$. Al incrementar el grado del polinomio de apoyo, tendremos que la curva representativa de la función *f* se apoyará en la recta $y = a_1(x-a) + a_0$ en las proximidades del número *a*. Siguiendo con este patrón, la gráfica de *f* se apoyará en la parábola $y = a_2(x-a)^2 + a_1(x-a) + a_0$ y se seguirá de modo similar este patrón, si aumentamos el grado del polinomio de apoyo.

Actividad 6.1

Realiza un análisis semejante al mostrado en los dos últimos ejemplos, donde se graficaba a la función y a cada uno de sus sumandos en la misma pantalla del GeoGebra, con el fin de analizar la manera en que la gráfica de los sumandos va configurando progresivamente la gráfica de la suma.

Intenta en cada caso, elegir la opción Zoom de acercamiento para confirmar que cada una de las aproximaciones se acerca efectivamente cada vez más a la gráfica de la función polinomial original. El punto sobre el cual habrá que analizar el comportamiento está dado en cada ejercicio.

1. $f(x) = -x$, en $x = 0$.

2. $f(x) = x + 2$, en $x = 0$ o en $x = -2$.

3. $f(x) = -3x + 3$, en $x = 0$.

4. $f(x) = -3(x - 1) + 3$, en $x = 1$.

5. $f(x) = -3(x - 2) + 3$, en $x = 2$.

6. $f(x) = -3(x - 3) + 3$, en $x = 3$.

7. $f(x) = x^2 - 2x + 0.5$, en $x = 0$.

8. $f(x) = 5(x - 1)^2 - 7(x - 1) + 3$, en $x = 1$.

9. $f(x) = 2(x - 1)^2 - 2(x - 1) + 2$, en $x = 1$.

10. $f(x) = -3x^2$, en $x = 0$.

11. $f(x) = -3x^2 + 2x$, en $x = 0$.

12. $f(x) = -3x^2 + 2x + 1$, en $x = 0$.

13. $f(x) = 2(x - 4)^2 - (x - 4) + 5$, en $x = 4$.

14. $f(x) = 2(x - 2)^3 + 7(x - 2)^2 + 7(x - 2) + 3$, en $x = 2$.

15. $f(x) = 2x^3 + 7x^2 + 7x + 3$, en $x = 0$.

16. $f(x) = 2(x - 1)^3$, en $x = 1$.

17. $f(x) = 2(x - 1)^3 + 7(x - 1)^2$, en $x = 1$.

18. $f(x) = 2(x - 1)^3 + 7(x - 1)^2 + 7(x - 1)$, en $x = 1$.

19. $f(x) = 2(x + 1)^3 + 7(x + 1)^2 + 7(x + 1) + 3$, en $x = 1$.

20. $f(x) = 3(x - 1)^3 - (x - 1)^2 + 7(x - 1) - 3$, en $x = 1$.

21. $f(x) = (x + 2)^3 - (x + 2)^2 + (x + 2) - 1$, en $x = -2$.

22. $f(x) = x$, en $x = 0$.

23. $f(x) = x + 1$, en $x = 0$.

24. $f(x) = x^2 + x + 1$, en $x = 0$.

25. $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$, en $x = 0$.

26. $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$, en $x = 0$.

27. $f(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$, en $x = 0$.

28. $f(x) = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$, en $x = 0$.

Actividad 6.2

La mecánica de trabajo será la siguiente. Piensa individualmente estos problemas, plantea una solución factible y procura construir diversas soluciones, algunas de ellas apoyadas en la visualización. Formula una versión escrita de tus intentos.

1. Considera la función primitiva $y = x$. Identifica a la recta anterior como la bisectriz del ángulo recto $\angle$IOJ del plano cartesiano. Sólo con operaciones gráficas, construye la gráfica de la función $y = x^2$. Demuestra con argumentos algebraicos que su gráfica es una parábola cóncava hacia arriba.

2. Grafica la función $y = x^3$ de dos maneras distintas. Una como la multiplicación gráfica de las funciones $y = x$, $y = x$ y $y = x$; y la otra como el producto de $y = x$ con $y = x^2$. Demuestra que la función cúbica es creciente y cambia su concavidad en el origen. Muestra que es cóncava hacia arriba en los positivos y cóncava hacia abajo en los negativos.

3. Construye un bosquejo de las gráficas de la familia $y = x^n$, considerando los casos $n = 1$, y en general que n sea par y n es impar.

4. Bosqueja las gráficas de la familia $y = \dfrac{1}{x^n}$, considerando los casos en que n sea par e impar.

Actividad 6.3

Reunidos en grupo, discutan los siguientes problemas y formulen una versión escrita de las soluciones construidas.

1. Utilizando la información sobre la multiplicidad de las raíces de un polinomio que se ha discutido en los capítulos anteriores, construye una representación gráfica de la función que se indica en cada inciso.

   a) $f(x) = x\,(x-1)\,(x-2)$

   b) $f(x) = x^2(x-1)\,(x-2)$

   c) $f(x) = x(x-1)^2\,(x-2)$

   d) $f(x) = x(x-1)\,(x-2)^2$

   e) $f(x) = x^2(x-1)^2\,(x-2)$

   f) $f(x) = x^2(x-1)\,(x-2)^2$

   g) $f(x) = x(x-1)^2\,(x-2)^2$

   h) $f(x) = x^2(x-1)^2\,(x-2)^2$

   i) $f(x) = x(x-1)^2\,(x-2)^3$

   j) $f(x) = x(x-1)^3\,(x-2)^2$

2. Si $f(x) = (x-1)^3(x-3)^4$ justifica por qué:

   a) $\dfrac{f(x)}{(x-1)} \to 0$, cuando $x \to 1$.

   b) $\dfrac{f(x)}{(x-1)^2} \to 0$, cuando $x \to 1$.

   c) $\dfrac{f(x)}{(x-1)^3} \to 16$, cuando $x \to 1$.

   d) $\dfrac{f(x)}{x-3} \to 0$, cuando $x \to 3$.

   e) $\dfrac{f(x)}{(x-3)^2} \to 0$, cuando $x \to 3$.

   f) $\dfrac{f(x)}{(x-3)^3} \to 0$, cuando $x \to 3$.

   g) $\dfrac{f(x)}{(x-3)^4} \to 8$, cuando $x \to 3$.

3. Generaliza el resultado anterior. Supón que $f(x) = g(x)\,h(x)$ y que a es una raíz de multiplicidad par de g, pero no es raíz de h. Mientras que b es una raíz de multiplicidad impar de h que no es raíz de g. En consecuencia $a \neq b$. Justifica visualmente cada una de las siguientes afirmaciones:

a) a y b son raíces de f de multiplicidad par e impar respectivamente.

b) La gráfica de f en las proximidades de a es parecida a la de g, salvo por un factor constante en las proximidades de a. Equivalentemente las gráficas de f y h son parecidas entre sí en las proximidades de b. Verifica este resultado visualmente.

c) $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to h(a)$ cuando $x \to a$, pero $\dfrac{f(x)}{(x-a)^j} \to 0$, para toda j natural tal que $j<n$. Donde n es el orden de multiplicidad de a como raíz de f.

d) $\dfrac{f(x)}{h(x)} \to g(b)$ cuando $x \to b$, mientras que $\dfrac{f(x)}{(x-b)^j} \to 0$, para $j<n$. Donde n es el orden de multiplicidad de b como raíz de f.

e) Una versión de la regla de L'Hôpital usando los resultados obtenidos en los incisos (c) y (d). Establece cuáles son las hipótesis que se pueden cumplir con esta versión de la regla.

Actividad 6.4

Reunidos en grupo, discutan los siguientes problemas, formulen una versión escrita de las soluciones construidas en grupo, no dejes de pensar en forma individual las diversas soluciones.

1. Construye un bosquejo de la gráfica de cada una de las siguientes funciones. Usa a las curvas $y = 1$, $y = x$, $y = x^2$ y $y = x^3$. Explica en cada caso, el papel que juegan los coeficientes del polinomio en cuestión.

   a) $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$

   b) $g(x) = x^3 + x^2 + x - 1$

   c) $h(x) = x^3 + x^2 - x + 1$

   d) $i(x) = x^3 - x^2 + x + 1$

   e) $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$

   f) $k(x) = x^3 - x^2 + x - 1$

   g) $l(x) = x^3 - x^2 - x + 1$

   h) $m(x) = x^3 - x^2 - x - 1$

2. Bosqueja las gráficas de las siguientes funciones:

   a) $f_1(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$

   b) $f_2(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$

   c) $f_3(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

   d) $f_4(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

3. ¿Encuentras alguna relación entre el número de cambios de signo que tienen los coeficientes de las funciones y el número de raíces positivas del polinomio?

Actividad 6.5

Reflexiona en forma individual cada uno de estos problemas, plantea enseguida una solución factible y procura construir diversas soluciones. Usa estrategias de visualización.

1. Construye las gráficas de las funciones $y = x$, $y = x - 1$, $y = x - 2$ y determina las regiones donde ellas son positivas, negativas o cero. Construye con esa información la gráfica de la función $y = x(x - 1)(x - 2)$. Generaliza este resultado para un producto de factores lineales de la forma $y = \pi(x - \alpha_i)$.

2. Bosqueja las gráficas de las funciones $y = x$, $y = x - 2$, $y = x + 1$ y determina las regiones en las que ellas sean positivas, negativas o cero. Construye con esa información la gráfica de la función $y = \dfrac{x(x-1)}{x+1}$. Generaliza este resultado para un cociente de factores lineales de la forma $y = \dfrac{\pi(x-\alpha_i)}{\pi(x-\beta_j)}$.

3. Construya las gráficas de las funciones $y = x - 1$, $y = (x-1)^2$, $y = (x-1)^3$ de dos maneras distintas, por regiones y por la naturaleza de la multiplicidad de sus raíces.

4. Generaliza el problema anterior y construya un bosquejo de las gráficas de la familia de funciones $y = (x-a)^n$, considerando los casos en que $n = 1$, y en general que n sea par y n es impar.

5. Construye un bosquejo de las gráficas de la familia $y = \dfrac{1}{(x-a)^n}$, considerando los casos cuando n sea par y cuando sea impar.

Actividad 6.6

Durante una hora, resuelve los problemas con sus incisos. Escribe tus respuestas, incluyendo tus dudas. Posteriormente, durante la siguiente hora, discute en equipos de tres personas tus dudas y tus soluciones, y elabora una sola versión de las soluciones por equipo.

1. Bosqueja la gráfica de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = x(x+1)^3(x-3)^2 - 1$

   b) $f(x) = x^6 + x^5 - x^4 - x^3$

   c) $f(x) = \dfrac{x(x+1)^3(x-3)^2}{(1-x)^4(x-2)^2}$

2. Determina cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas, cuáles falsas y cuáles eventualmente podrían ser verdaderas.

   a) Si f es una función *racional*, entonces el límite de f cuando x tiende a infinito es infinito.

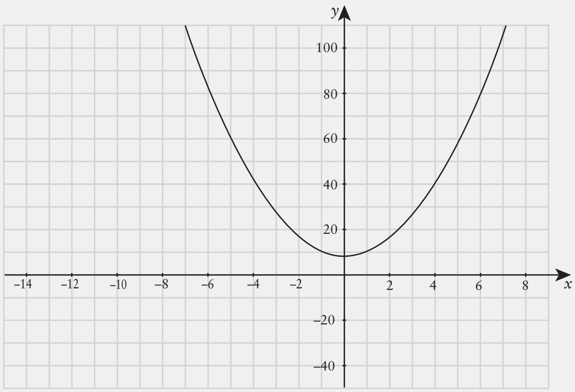
   b) Si f es una función racional, entonces el límite de f cuando x tiende a más infinito es tres y cuando tiende a menos infinito es cero.

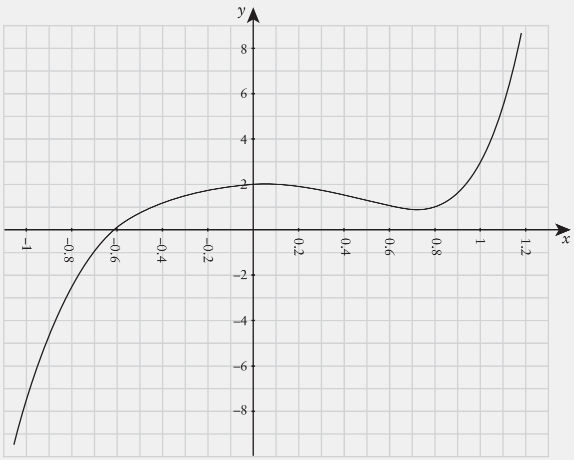
   c) No existe valor de k para el cual la gráfica de $f(x) = x^2 + kx$ sea tangente a $y = 5$.

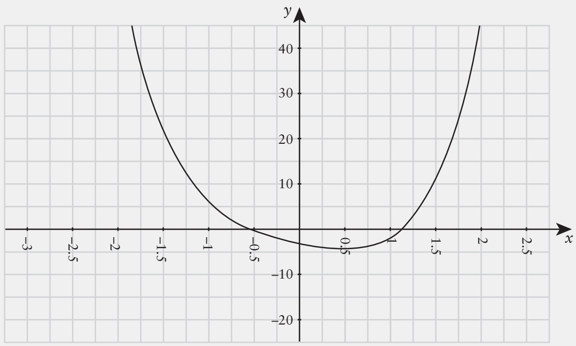
3. Supón que f es una función impar definida en los reales. Demuestra visual y analíticamente, que $f'(-x) = f'(x)$.

4. Resuelve gráfica y analíticamente, la desigualdad $4x < 7x + 1 \leq 3x - 2$.

5. Para cada una de las siguientes gráficas, construye al menos una expresión analítica que represente a la gráfica respectiva.







Actividad 6.7

1. Representa gráficamente las siguientes funciones usando GeoGebra. Conviene que las grafiques en la misma pantalla en forma secuencial. Discute las razones por las que estas gráficas están próximas entre sí.

   a) $f(x)=e^x$

   b) $f(x)=1+x$

   c) $f(x)=1+x+\dfrac{x^2}{2}$

   d) $f(x)=1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{2\times 3}$

   e) $f(x)=1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{2\times 3}+\dfrac{x^4}{2\times 3\times 4}$

2. Determina cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas, cuáles falsas y cuáles podrían ser eventualmente verdaderas.

   a) Si f es una función polinomial, entonces ella misma es la mejor aproximación polinomial hasta el orden del mismo grado del polinomio.

   b) Si f es una función polinomial de la forma $f(x) = \sum a_i x^i$, entonces sus coeficientes tienen una relación específica con las derivadas de f en el cero.

   c) No existe valor de k para el cual la gráfica de $f(x) = x^{2n} + kx$ sea tangente a $y = k$.

3. Compara las funciones exponenciales y sus desarrollos en serie de potencias hasta el orden tres. Decide si son iguales hasta el orden 1, 2, y 3 respectivamente. Grafica las funciones para sostener tus propias conjeturas.

Actividad 6.8

Reunidos en grupos, discutan los siguientes problemas y formulen una versión escrita de las soluciones construidas, no dejes de pensar en forma individual diversas soluciones.

1. Construye un bosquejo de la gráfica de cada una de las siguientes funciones.

   a) $f(x) = \operatorname{sen} x$

   b) $f(x) = x$

   c) $f(x) = x - \dfrac{x^3}{3!}$

   d) $f(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!}$

   e) $f(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!}$

2. ¿Encuentras alguna relación entre el número de cambios de signo que tienen los coeficientes de las funciones polinomiales y el número de raíces positivas de los polinomios en cuestión?

3. ¿Qué relación guardan estas raíces con las respectivas raíces de f?

Capítulo 7

SÍNTESIS METÓDICA, UN PASEO POR LAS GRÁFICAS

7.1 Una aproximación visual a la composición de funciones

Un ejemplo adecuado para hablar de visualización en el sentido que trata este libro es la forma en que se puede estudiar la composición de funciones, noción que consideramos se aborda muy someramente en el ambiente escolar y se le reduce a la mera aplicación de una función evaluada en otra. Sin embargo, consideramos que se trata de una noción que puede explorarse desde diversas miradas. Juega un papel preponderante en la regla de la cadena en cálculo diferencial y cálculo avanzado, y es la clave de la noción de cambio de variable en la teoría de integración. En el caso de la composición de funciones reales de variable real, podemos ejemplificar nuestro punto de vista de la siguiente forma.

Definición: la composición de f con g, denotada por $f \circ g$ y que se lee "f círculo g" o "f composición g", es la función cuyo dominio consta de los elementos $x \in D_g$ tales que $g(x) \in D_f$ y cuya regla de correspondencia está dada por:

$$x \mapsto (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Numéricamente esto significa que, por ejemplo: si la función $f = \{(1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 6)\}$ y la función $g = \{(0, -3), (3, 2), (4, 1)\}$, entonces $f \circ g = \{(3,5),(4,3)\}$.

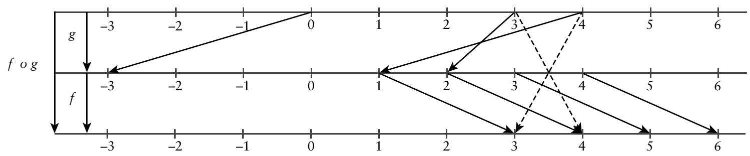
Lo que tenemos que encontrar es aquella x del par ordenado $(x, g(x))$ cuya $g(x)$ sea igual a la x del par ordenado $(x, f(x))$. En el ejemplo anterior, tenemos:

$$f = \{(1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 6)\}$$

$$g = \{(0, -3), (3, 2), (4, 1)\}$$

Una vez identificados los pares ordenados, conformamos el par ordenado de la composición de funciones con la x del par ordenado $(x, g(x))$ y con la $f(x)$ del par ordenado $(x, f(x))$.

Si observamos esta composición como una correspondencia o mapeo, se tiene lo siguiente:



Ahora bien, algo que en el ámbito escolar no se explora profundamente es la representación gráfica de la operación composición. De manera general podemos definir esta operación, en su forma gráfica, de la siguiente forma (figura 7.1).

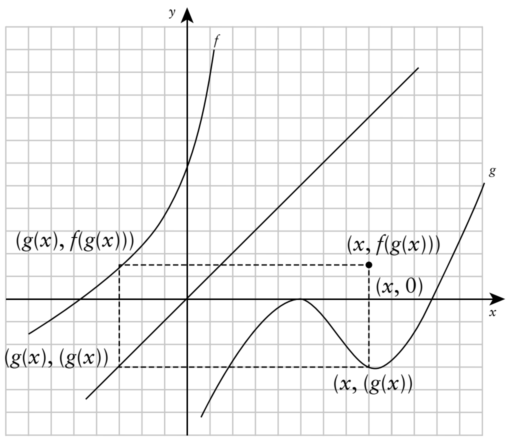


Figura 7.1 Representación gráfica de la operación composición.

Si f y g son funciones reales de variable real, entonces la gráfica $f \circ g$ puede construirse partiendo de las gráficas de f y g. Toma un número x cualquiera que pertenezca al dominio de definición de la función g, es decir, $x \in D_g$, se traza la recta vertical que pasa por $(x, 0)$ y se llega hasta $(x, g(x))$, en ese punto se proyecta una recta horizontal hasta la recta $\{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ en el punto $(g(x), g(x))$. Si $x \in D_{f \circ g}$ entonces $g(x) \in D_f$ y la recta vertical que pasa por $(g(x), g(x))$ intersectará a la gráfica de f en el punto $(g(x), f(g(x)))$. Entonces, el punto $(x, f(g(x)))$ se obtiene como el punto de intersección de la recta horizontal que pasa por $(g(x), f(g(x)))$ y la recta vertical que pasa por $(x, 0)$.

¿Por qué es claro que para entender este concepto se necesita del desarrollo de la visualización y del pensamiento matemático? Puede ser tan simple como pensar en poder trabajar con sus distintas representaciones, vincularlas unas con otras, transitar de una a otra comprendiendo la relación entre sus elementos, etcétera. Todo lo anterior tiene la finalidad de proporcionar un significado a una noción con el objetivo de enfrentar nuevos problemas con un repertorio de herramientas mucho más amplio. Por ejemplo, comprender la operación composición, sus elementos, características y representaciones, para entender lo que es la derivada de la función compuesta y no quedarse al nivel de la algoritmia.

Actividad 7.1

1. Realiza la composición $f \circ g$ y la composición $g \circ f$ para cada uno de los siguientes casos:

   a) $f = \{(-5,4), (-2,1), (0,0), (3,2)\}$, $g = \{(-10,-5), (1,-2), (2,0), (4,2), (6,3)\}$

   b) $f = \{(-2,2), (-1,0), (0,3), (4,-1)\}$, $g = \{(0,-1), (1,1), (2,4), (3,5)\}$

   c) $f = \{(0,0), (2,4), (4,16), (8,64)\}$, $g = \{(0,0), (1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$

d) $f = \{(0,4), (2,0), (3,-2), (6,3)\}$, $g = \{(-2,0), (-1,-2), (0,2), (2,6), (8,5)\}$

e) $f = \{(-7,-3), (-5,0), (-2,3), (0,0)\}$, $g = \{(-3,-5), (0,-7), (3,0), (6,-2), (7,0)\}$

2. Realiza la composición $f \circ g$ y la composición $g \circ f$ para cada uno de los siguientes casos:

a) $f = x^2 + x - 2$, $g = x - 3$

b) $f = 2x^3 + x^2 + 3x$, $g = 0.5x^2 - x$

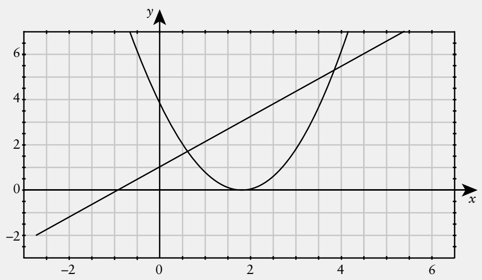
c) $f = x^2 + 5$, $g = x^2 - 5$

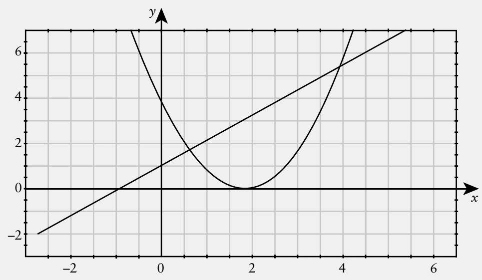
d) $f = -0.5x^2 + 3x - 2$, $g = x + 2$

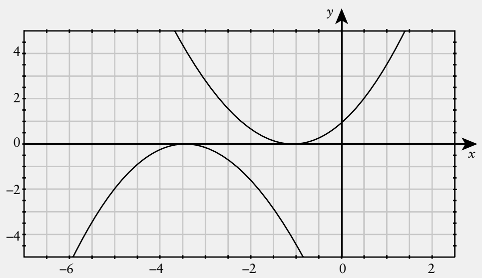
e) $f = -2x^3 + x^2 + x$, $g = -5x^2 - 3$

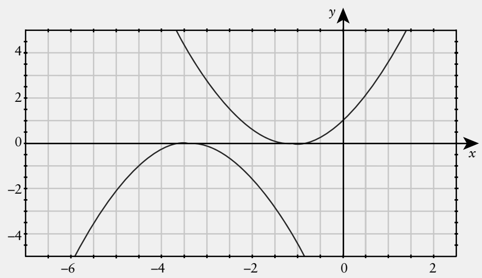
3. Asigna f y g a cada gráfica y realiza las composiciones que se indican:

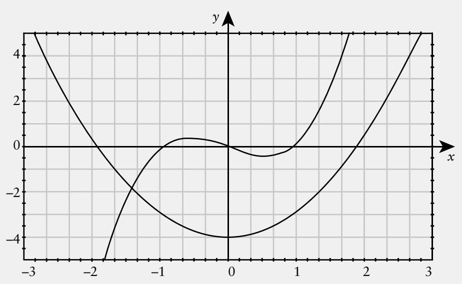
$f \circ g$ $\qquad\qquad\qquad$ $g \circ f$

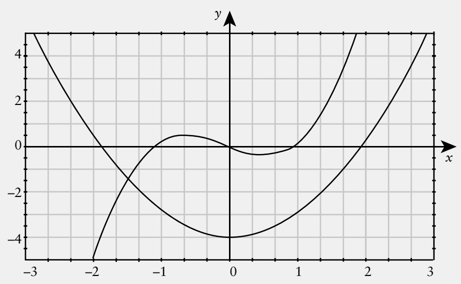


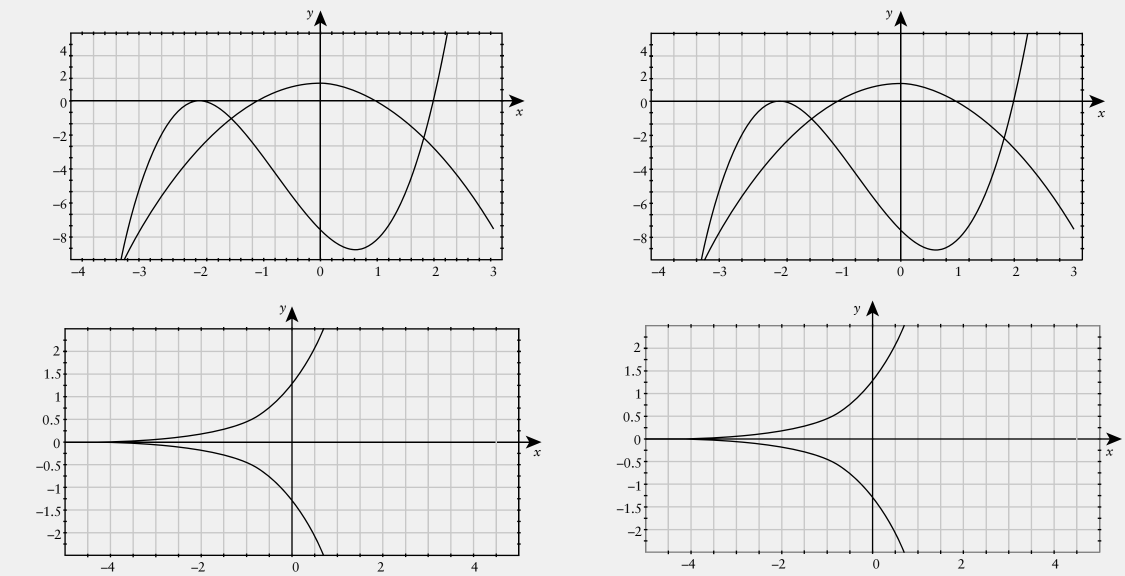








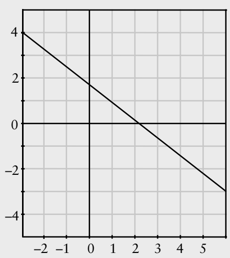
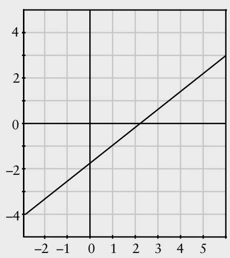
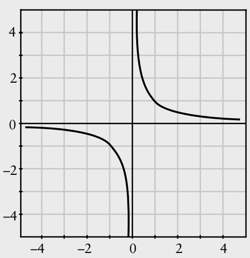
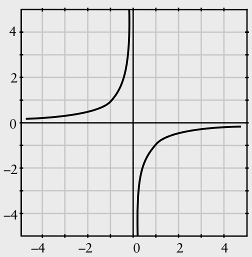


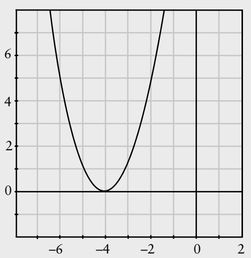
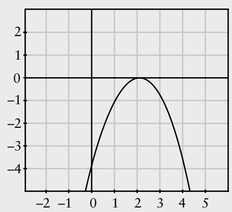
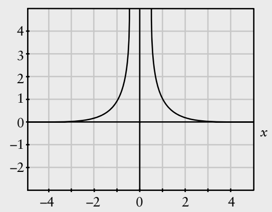
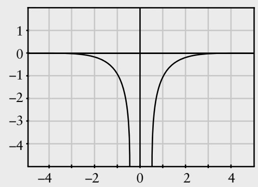
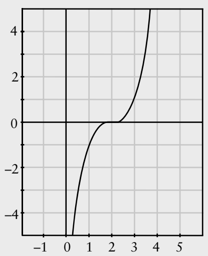
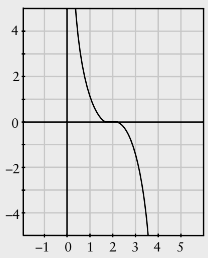
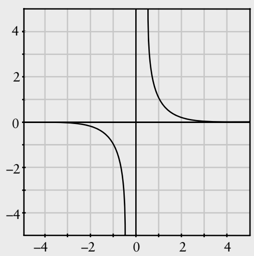
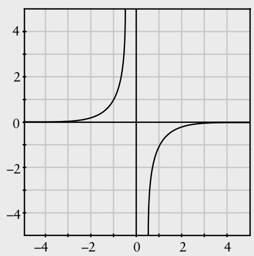


7.2 Guía para la construcción de gráficas de funciones racionales

Después de las distintas formas gráficas que hemos trabajado a lo largo del libro, se pueden resumir en la tabla 7.1, dos de los elementos básicos para un análisis local en el bosquejo de las gráficas.

Tabla 7.1 Multiplicidad de las raíces y asíntotas.

$\pm(x-a)^n$	En el numerador, como raíces		En el denominador, como asíntotas	
$n = 1$				

n par				
n impar				

La información de la tabla 7.1 puede servirnos ahora como guía en el bosquejo de gráficas, sin dejar de lado el análisis numérico y analítico que éste conlleva.

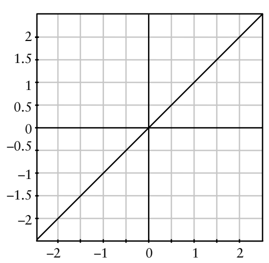
Para hacer un análisis de cómo construir la gráfica de una función racional o cómo encontrar una posible expresión analítica correspondiente con la gráfica de una función racional, se parte de un ejemplo que permita desmenuzar todas las características importantes para abordar dicha tarea. De este modo, si tenemos:

$$y = \frac{x(x-1)(x-3)^2(x^2+4)}{(x+1)(x-2)^2(x+2)^3}$$

Comenzaremos por analizar el papel del numerador en la conformación de la gráfica de la función, pues como se sabe, este es quien determina las raíces de la función. Observen que el factor $(x^2 + 4)$ no cruza al eje x. ¿Por qué?

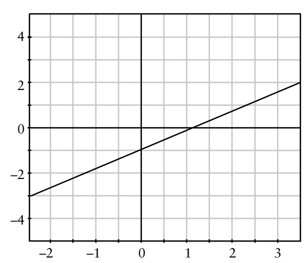
x

Tiene una raíz de multiplicidad 1, por lo tanto produce un cruce con el eje x.



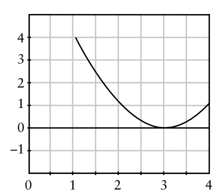
$(x - 1)$

Tiene una raíz de multiplicidad 1, por lo tanto produce un cruce con el eje x.



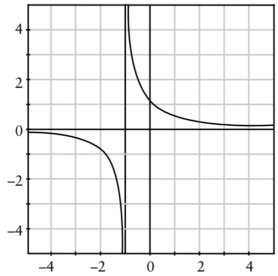
$(x - 3)^2$

Tiene una raíz de multiplicidad 2, por lo tanto produce un toque tangencial con el eje x.

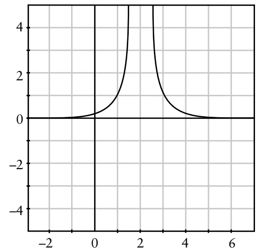


Ahora, analicemos al denominador, quien produce las asíntotas verticales.

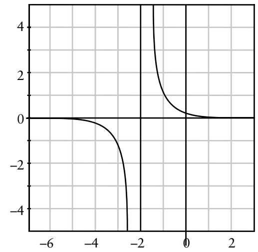
$1/(x+1)$



$1/(x-2)^2$



$1/(x+2)^3$



Ahora bien, como el polinomio del numerador tiene grado 6, al igual que el polinomio del denominador, entonces el cociente de ambos polinomios se comporta para valores grandes de x en valor absoluto, como un polinomio de grado cero, es decir, tenderá a ser una constante. Esto se verá reflejado en el comportamiento de la gráfica cuando x vaya hacia ∞ o hacia $-\infty$.

Al bosquejar esta función, con base a la información anterior, se tiene la gráfica que muestra la figura 7.2.

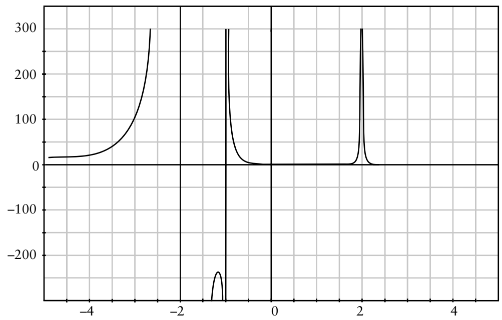


Figura 7.2 Representación gráfica de una función racional 1.

Para ver su comportamiento en los extremos, cuando la x es grande en valor absoluto, se gráfica $-100 \leq x \leq 100$ y $-10 \leq y \leq 10$ (figura 7.3).

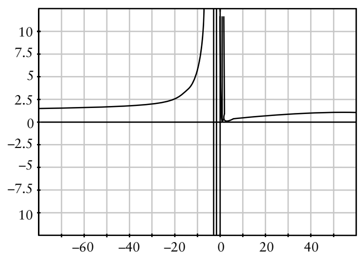


Figura 7.3 Representación gráfica de una función racional 2.

Para realizar el proceso inverso, es decir, obtener una expresión analítica a partir de una forma gráfica, es necesario identificar los elementos discutidos en la tabla 7.1 y reconocer los siguientes aspectos principales:

- Localizar las raíces y distinguir su multiplicidad.
- Localizar las asíntotas y estudiar el comportamiento de la función cerca de ellas.
- Con los valores de las raíces se debe factorizar en binomios para el numerador colocando el exponente correspondiente a la multiplicidad de raíces, y con los valores de las asíntotas se deben construir binomios para el denominador colocando el exponente correspondiente al comportamiento de la función alrededor de la asíntota.
- Visualizar el comportamiento a larga distancia (cuando la x es grande) y con base en ello, obtener la diferencia entre el grado del numerador y el grado del denominador. Por ejemplo, si el comportamiento a largo plazo es como el de una asíntota horizontal, esto quiere decir que la diferencia de los grados es cero.

Analicemos la gráfica de la figura 7.4.

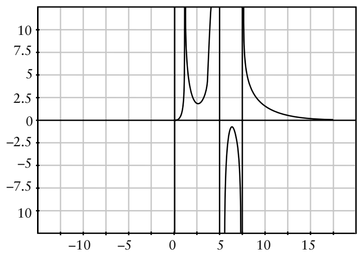


Figura 7.4 Representación gráfica de una función racional 3.

En la figura 7.4 se pueden observar las siguientes características:

- Raíz $x = 0$ con multiplicidad impar, mayor que 1.
- Asíntota vertical en $x = 2$. Alrededor de la asíntota la función es positiva, por lo que suponemos un término $(x - 2)^n$ con n par.
- Asíntota vertical en $x = 5$. Antes de la asíntota la función es positiva, después es negativa, por lo que suponemos un término $(x - 2)^n$ con n impar.
- Raíz $x = 6$ con multiplicidad par.
- Asíntota vertical en $x = 7$. Antes de la asíntota la función es negativa, después positiva, por lo que se asume la existencia de un término de la forma $(x - 7)^n$ con n impar.

Al construir tentativamente la expresión analítica, se tiene que:

$$y = \frac{x^3(x-6)^2}{(x-1)^2(x-5)^3(x-7)}$$

Sólo faltaría observar el comportamiento de la gráfica cuando x crece (va hacia ∞) o decrece (va hacia $-\infty$). La función que se propone tiene un numerador de grado 5 y un denominador de grado 6, por lo que se supone que en dicha función, para valores muy grandes o muy pequeños se comportará como la función $y = \frac{1}{x}$, la figura 7.5 permitirá confirmarlo visualmente.

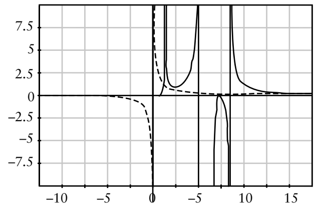


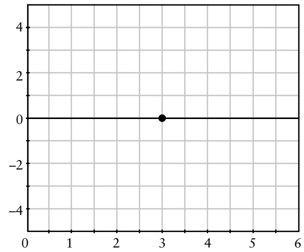
Figura 7.5 Representación gráfica de una función racional 4.

Efectivamente, la conjetura es cierta. En caso de no ser así habrá que hacer ajustes con los exponentes, tanto de numerador como de denominador. Por ejemplo, si se tiene una raíz de multiplicidad par, esta puede ser doble o cuarta, y así podremos acercarnos bastante al diseño buscado.

7.3 Una aproximación visual a los Polinomios de Lagrange

El problema ahora es un tanto más novedoso. Pensemos ahora en construir una función polinomial que pase por ciertos puntos dados. La herramienta que se usará es la de los polinomios de Lagrange; sin embargo, sería muy simple enunciar la fórmula y comentar algunos ejemplos. Por el contrario, trataremos de construir dicha función a partir de las concepciones formuladas en los capítulos anteriores.

Comencemos por construir un polinomio que pase por un punto, y pensemos que el punto está colocado exactamente sobre el eje x. Esto significa que en dicho punto la función será igual a cero, analicemos el siguiente diagrama:



Sin embargo, por ese punto pueden pasar una infinidad de funciones polinomiales, pues simplemente necesitan cumplir que $f(x_i) = 0$, ¿cómo construimos una función polinomial que al tomar el valor de x_i sea cero?, se debe pensar en las funciones primitivas $f(x) = x$, $f(x) = x^2$ y $f(x) = x^3$, y en sus gráficas (figura 7.6):

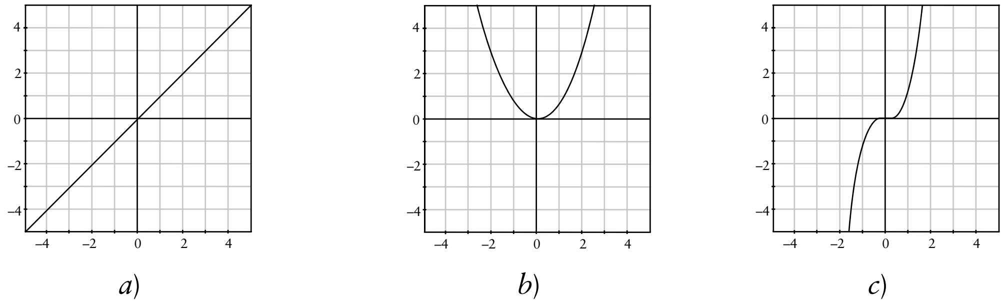


Figura 7.6. Representación gráfica de *a)* $f(x) = x$; *b)* $f(x) = x^2$; *c)* $f(x) = x^3$.

Sabemos bien que con la transformación $f(x - a)$ la gráfica se desplaza horizontalmente y provoca que el punto de intersección con el eje x, para el caso de las funciones anteriores, sea $(a, 0)$. Entonces podemos usar esta información para construir funciones polinomiales que pasen por un punto arbitrario x_i. Esto es $f(x) = (x - x_i)^n$ con $n \geq 1$. Por ejemplo, pensemos en el punto $(2, 0)$, y en $n = 1, 2, 3$. Entonces las funciones polinomiales que pasan por ese punto serían $f(x) = (x - 2)$, $f(x) = (x - 2)^2$ y $f(x) = (x - 2)^3$, cuyas gráficas se representan en la figura 7.7.

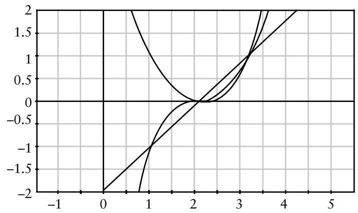


Figura 7.7 Aproximación polinomial a un punto.

Pero también, como se vio anteriormente, la transformación $Af(x)$ provoca cambios en la gráfica que no modifican el punto donde cruza al eje x. Por lo tanto, la función polinomial podría establecerse de la siguiente forma:

$$f(x) = A(x - x_i)^n,$$

donde el valor x_i determinará el punto de intersección con el eje x y su raíz, en este caso, será de multiplicidad n.

Por ejemplo, para $A = -1, 1, 2$, $x_i = 3$ y $n = 1, 2, 3$, tenemos las siguientes gráficas (figura 7.8).

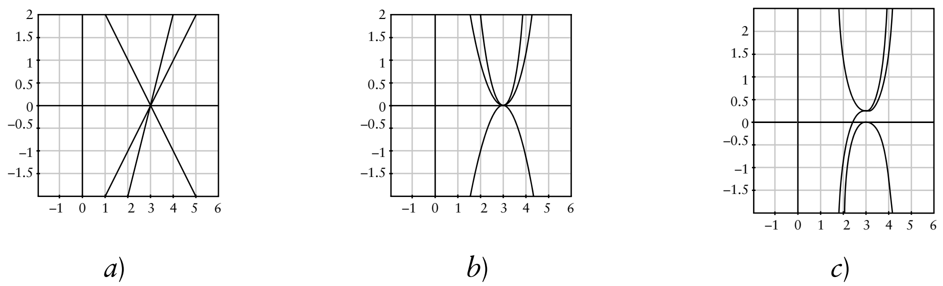
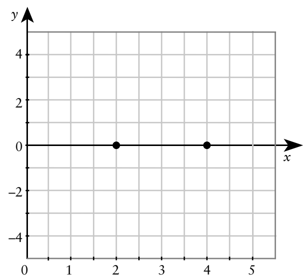


Figura 7.8 Representación gráfica de *a*) $n = 1$; *b*) $n = 2$; *c*) $n = 3$.

Ahora bien, pensemos en una función que pase por dos puntos, y que éstos estén sobre el eje x, tal como se muestra a continuación:



Si construimos una función polinomial de primer orden, la recta que pasa por ambos puntos es tal y como se observa en la gráfica, el eje x mismo; o bien, $f(x) \equiv 0$, función que incluso pasa por sobre todos los puntos $(x_i, 0)$.

Si se construye una función polinomial de segundo orden se puede partir de la estructura que se ha manejado hasta ahora, es decir, si x_1 y x_2 son dos raíces de la función, los puntos $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$ son aquellos por donde pasa la gráfica de la función. Como sabemos que la transformación Af(x) no afecta a las raíces, de modo que la función queda de la siguiente forma:

$$f(x) = A(x - x_1)(x - x_2).$$

Por ejemplo, si tenemos los puntos $(-1, 0)$ y $(2, 0)$, la función quedaría de la siguiente forma:

$$f(x) = A(x + 1)(x - 2),$$

si graficamos para $A = -1, 1, 2$, tenemos las siguientes gráficas (figura 7.9).

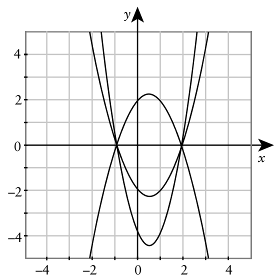


Figura 7.9 Aproximación polinomial a dos puntos.

Pero también, del mismo modo, podremos construir la función de tercer orden que pase por esos puntos. Recordemos que en el capítulo 3 conocimos las formas gráficas de la función cúbica, y sabemos que esta puede pasar sólo por dos puntos $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$ en el eje x, en tal caso tenemos dos posibilidades:

1. Que x_1 sea raíz de multiplicidad 1 y x_2 sea raíz de multiplicidad 2.
2. Que x_1 sea raíz de multiplicidad 2 y x_2 sea raíz de multiplicidad 1.

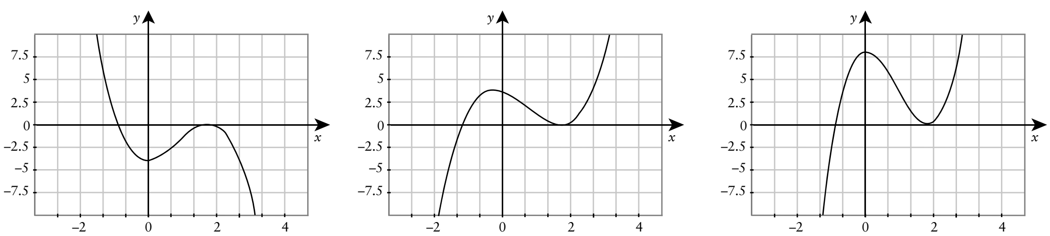
Para tales posibilidades tendríamos las siguientes expresiones:

$$f(x) = A(x - x_1)(x - x_2)^2$$

$$f(x) = A(x - x_1)^2(x - x_2)$$

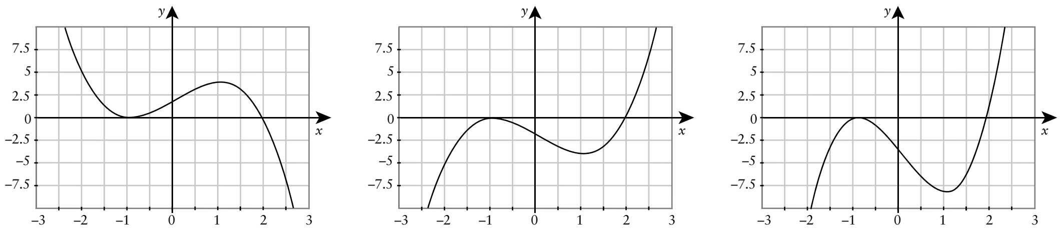
Por ejemplo, para los puntos $(-1, 0)$ y $(2, 0)$ con $A = -1, 1, 2$, tenemos las siguientes gráficas para ambas posibilidades (figura 7.10).

$A = -1$ $A = 1$ $A = 2$



Posibilidad 1

$A = -1$ $A = 1$ $A = 2$

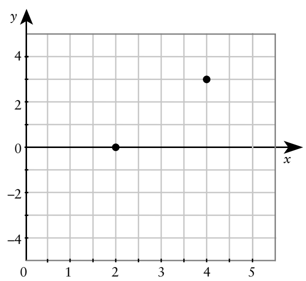


Posibilidad 2

Figura 7.10 Representación gráfica de **Posibilidad 1**: $f(x) = A(x - x_1)(x - x_2)^2$; y **Posibilidad 2**: $f(x) = A(x - x_1)^2(x - x_2)$.

Así podríamos seguir buscando funciones polinomiales que crucen n veces el eje x. Sin embargo, podríamos tener algunos de los puntos fuera del eje x, y en tales casos, también se quiere construir una función polinomial que una todos los puntos, estos casos requerirán de otro tipo de análisis.

Pensemos, por ejemplo, en construir una función que pase por los puntos $(x_1, 0)$ y (x_2, y_2), como se muestra a continuación:



Si pensamos en una recta que pase por ambos puntos, indudablemente se pensaría en la fórmula $(y - y_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$, y como $y_1 = 0$ la expresión queda de la forma, $y = \frac{y_2}{x_2 - x_1}(x - x_1)$. Observemos que cuando $x = x_1$ la función es $y = \frac{y_2}{x_2 - x_1}(x_1 - x_1) = 0$, pero cuando $x = x_2$ la función es $y = \frac{y_2}{x_2 - x_1}(x_2 - x_1) = y_2$ y se cumple en este caso que la función pasa por ambos puntos.

La función lineal que pasa por los puntos (2, 0) y (4, 3) es $y = \frac{3}{2}(x - 2)$ y su gráfica se muestra en la figura 7.11.

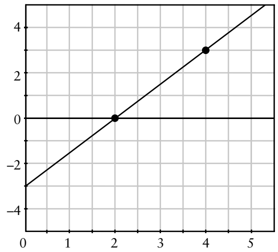
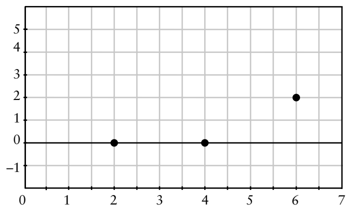


Figura 7.11 Aproximación polinomial a dos puntos.

¿Qué pasa si ahora tenemos dos puntos que crucen el eje x y uno que no lo haga?, tal como se muestra a continuación:

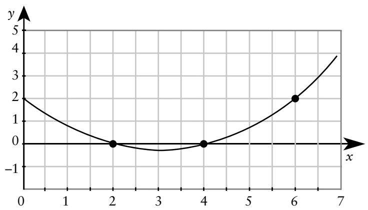


Sabemos ahora que cruzar dos veces el eje x en $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$ quiere decir que la función tiene dos raíces x_1 y x_2, de tal forma que la función puede ser $y = (x - x_1)(x - x_2)$. Sin embargo, debe pasar por otro punto, entonces cuando $x = x_3$ la función y será igual a y_3, entonces se divide la función entre $(x_3 - x_1)$ $(x_3 - x_2)$ —para que la función valga 1 cuando $x = x_3$— y multiplicamos por y_3 para que la función efectivamente pase por el punto (x_3, y_3). Nótese que en este caso, aplicar la transformación $Af(x)$ sí afectará al hecho de que pase por el punto (x_3, y_3). La función quedaría entonces de la forma $y = \dfrac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} y_3$.

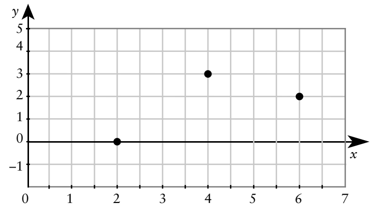
Por ejemplo, si tenemos los puntos $(2, 0)$, $(4, 0)$ y $(6, 2)$ la función polinomial tendría la forma:

$$y = \frac{(x-2)(x-4)}{(6-2)(6-4)} 2 = \frac{1}{4}(x-2)(x-4) = \frac{1}{4}(x^2 - 6x + 8)$$

Y su gráfica se vería como la que se muestra a continuación:



Ahora se debe construir una función que pase por un punto $(x_1, 0)$ que cruza el eje x, los puntos (x_2, y_2) y (x_3, y_3) no lo hacen, tal como se muestra a continuación:



Comencemos por construir la función que cruza por el primer punto, para tal caso tenemos la función $y=(x-x_1)$. Ahora bien, si queremos que cuando $x = x_2$ la función sea igual a y_2 construimos la siguiente fórmula $y=\frac{(x-x_1)}{(x_2-x_1)}y_2$, pero se tiene que tomar en cuenta que cuando x sea igual a x_3 la función debe ser igual a y_3, para tal caso ya no se puede hacer nada a la función anterior, ya que su término provocará solamente el paso por el punto (x_1, x_2). Añadimos entonces un término a la función, de tal forma que quede $y=\frac{(x-x_1)}{(x_2-x_1)}y_2+\frac{(x-x_1)}{(x_3-x_1)}y_3$.

Cuando $x = x_2$, el segundo término se debe anular y cuando $x = x_3$ el primer término se debe anular, de tal suerte que la función quede de la siguiente forma:

$$y=\frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)}y_2+\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)}y_3$$

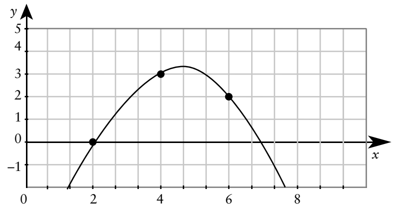
Sin embargo, se observa ahora que cuando $x = x_2$ el primer término ya no vale y_2 sino $(x_2 - x_3)y_2$ y cuando $x = x_3$ el segundo término ya no vale y_3 sino $(x_3 - x_2)y_3$, para evitar esto se divide el primer término entre (x_2-x_3) y al segundo entre $(x_3 - x_2)$. Por último, la función queda, como:

$$y=\frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}y_2+\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}y_3$$

Si, se tienen los puntos (2, 0), (4, 3) y (6, 2) la función queda, como:

$$\begin{aligned}y&=\frac{(x-2)(x-6)}{(4-2)(4-6)}3+\frac{(x-2)(x-4)}{(6-2)(6-4)}2=\frac{-3}{4}(x^2-8x+12)+\frac{1}{4}(x^2-6x+8)\\&=-0.5x^2+4.5x-7\end{aligned}$$

Y su gráfica queda como se muestra a continuación:



Este análisis tiene el objetivo de dar un significado a la construcción de funciones, utilizando las nociones trabajadas a lo largo del libro, de tal forma que llegar a la generalización, sea más que conocer una fórmula, es decir, conocer el significado de cada uno de sus términos, conocer su construcción y por qué es correcta.

Actividad 7.2

1. Construye el polinomio que pase por 3 puntos fuera del eje *x*.

2. Con base en los ejemplos anteriores, construye la fórmula general de un polinomio que pase por *n* puntos fuera del eje *x*, es decir, el polinomio de Lagrange.

3. Construye el polinomio que pase por los siguientes puntos:

   a) (2, 4) y (5, 3).

   b) (−6, 4) y (2, 5).

   c) (−2, 0) y (4, 0).

   d) (1, 5) y (5, 1).

   e) (0, 0) y (2, 8).

   f) (−1, 2), (2, −4) y (5, 3).

   g) (−3, 4), (−1, −2) y (0, −5).

   h) (−2, 0), (0, 4) y (5, 3).

   i) (−5, 3), (0, 2) y (3, −5).

   j) (−5, 5), (−2, 0), (1, 3) y (5, 8).

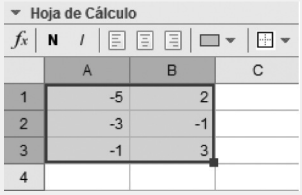
   k) (−2, 5), (0, 0), (2, 8) y (4, −2).

   l) (−5, 5), (−3,0), (−1, −5) y (1, 3).

   m) (−4, 0), (−2, 0), (0, 0) y (4, 8).

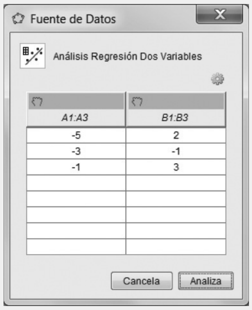
4. Lleva a cabo esta actividad en GeoGebra:

1. Ingresa en una hoja de cálculo los datos, como se muestra en la figura.

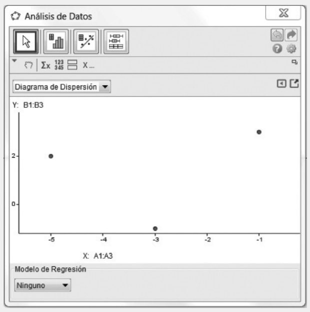


2. Con los datos seleccionados, selecciona la herramienta de "Análisis Regresión Dos Variables", que está activada al trabajar con la hoja de Cálculo, como se muestra en la figura.

3. Verifica que tus datos aparezcan correctamente en la pantalla que se va a desplegar y pulsa Analiza, como se muestra en la figura.



4. Se desplegará una pantalla con los puntos sobre el plano y un listado de modelos de regresión (esquina inferior izquierda). Elige la opción "Polinomio", como se muestra en la figura.



GeoGebra te mostrará la curva y el polinomio que se aproxime a tus puntos y con ella puedes verificar los polinomios que construiste en el ejercicio anterior.

7.4 Un paseo por algunas funciones trascendentes

7.4.1 Funciones trigonométricas o funciones circulares

7.4.1.1 Medidas de ángulos

Uno de los puntos de interés más antiguos de la geometría fue la medida de los ángulos con diversos propósitos. En la cultura babilónica, se sabe que medían los ángulos dividiendo el círculo en 360 partes, a las que ahora llamamos grados y denotamos con el símbolo °, de modo que cada una de esas partes producía un giro de 1°. El círculo era dividido en 360° como se muestra en la figura 7.12.

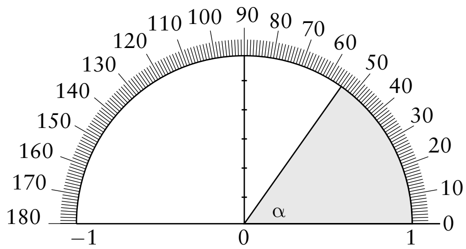


Figura 7.12 Transportador graduado en grados.

Según algunos autores, las limitaciones tecnológicas para medir giros generaron la necesidad de que se supliera la lectura de los giros por la medida de los segmentos y que con ayuda de tablas se pudiera deducir el valor de los ángulos. De este modo fueron las cuerdas de un círculo, y no los ángulos que la determinan, los objetos que sirvieron para medir los giros (figura 7.13).

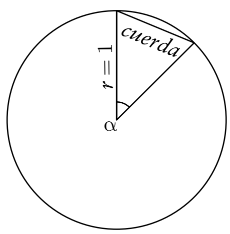


Figura 7.13 Cuerdas de un círculo.

Es así que, la función seno se relaciona con la cuerda mediante la relación:

$$\operatorname{sen} \alpha = \tfrac{1}{2} \text{ cuerda } (2\alpha)$$

Esta función seno, originalmente llamada *sinus rectus* (es decir, seno vertical) está mucho mejor adaptada para los cálculos con triángulos que la función cuerda (figura 7.14).

Figura 7.14 Representación gráfica de sen $\alpha = \tfrac{1}{2}$ cuerda (2α).

Consideremos un triángulo rectángulo como se muestra en la figura 7.15, las definiciones del seno de un ángulo agudo se obtienen al considerar las medidas de los lados de dicho triángulo mediante cocientes adecuados. De este modo, el $\operatorname{sen}(\alpha)=\frac{AB}{BC}$, $\cos(\alpha)=\frac{AC}{BC}$, $\tan(\alpha)=\frac{AB}{AC}$. Aunque también, la tangente de un ángulo α se obtiene mediante la relación $\tan(\alpha)=\frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)}$, la cotangente de α, como $\cot(\alpha)=\frac{AC}{AB}=\frac{\cos(\alpha)}{\operatorname{sen}(\alpha)}=\frac{1}{\tan(\alpha)}$.

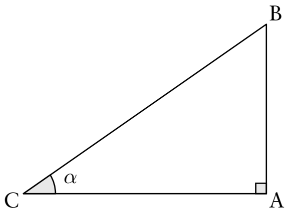


Figura 7.15 Triángulo rectángulo.

Si este triángulo está inscrito en un círculo de radio uno (círculo unitario), entonces las funciones seno, coseno, tangente y cotangente se pueden ver como las longitudes de los segmentos como se muestra en la figura 7.16.

Este acercamiento suele ser usual en los cursos de trigonometría, de hecho el origen etimológico de los términos griegos $\tau\rho\iota\gamma\omega\nu o$, *trigōno*, triángulo, y $\mu\varepsilon\tau\rho o\nu$ *metron*, medida; es decir, significa "medida de figuras con tres esquinas", de ahí que las definiciones de las relaciones trigonométricas se hacen sobre triángulos.

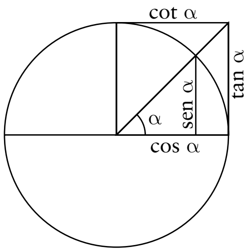
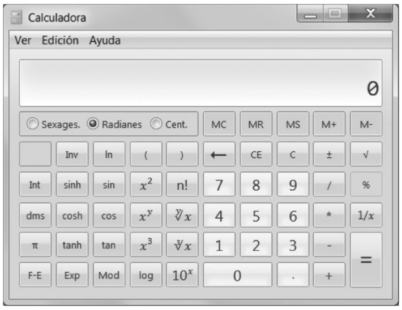


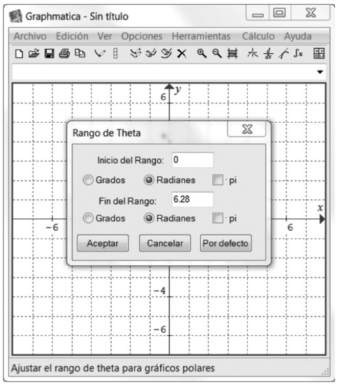
Figura 7.16 Triángulo inscrito en un círculo de radio uno.

Normalmente se usan dos formas distintas para medir los ángulos como puede verse en las calculadoras científicas o en los programas educativos (figura 7.17).

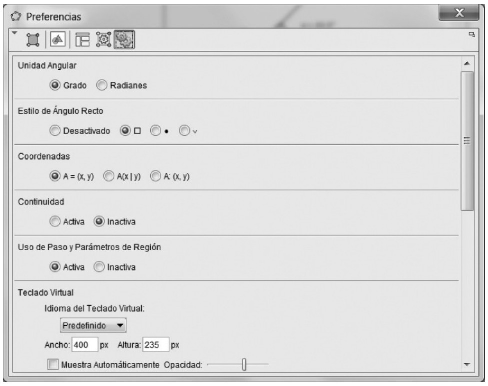
Calculadora ClassPad



Calculadora de Microsoft Windows



Programa Graphmatica



Programa GeoGebra

Figura 7.17 Ejemplos de calculadoras y programas educativos.

Los grados (en inglés *degree*) son muy usados en la trigonometría de la educación básica, se parte de dividir una circunferencia en 360 parte iguales, de manera que un giro de 360° sea equivalente a un giro que lleva al segmento a regresar sobre si mismo. Un giro de 180° es media vuelta completa y así sucesivamente. Los radianes por su parte, son de mayor uso en el bachillerato a causa quizá de que permiten, en forma adecuada, el tránsito de los grados a los radianes y de ahí a los reales, y en consecuencia posibilitan el hablar propiamente de las funciones trigonométricas como funciones reales de variable real.

Para definir al radián, se toma un círculo unitario (figura 7.18) y se define a un radián como el ángulo que se produce al tomar sobre la circunferencia una longitud de arco igual a 1.

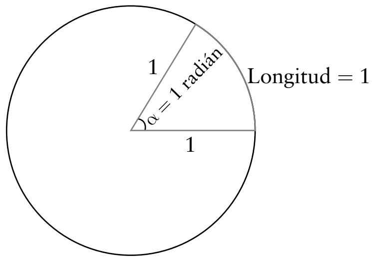


Figura 7.18 Definición de radianes usando el círculo unitario.

De este modo, se establecen equivalencias como las siguientes:

- $360°$ equivalen a 2π radianes
- $180°$ equivalen a π radianes
- $90°$ equivalen a $\pi/2$ radianes
- $45°$ equivalen a $\pi/4$ radianes

En virtud de que 1 radián equivale a $180°/\pi$.

7.4.1.2 Las funciones seno y coseno

Como dijimos con anterioridad, tanto el seno como el coseno trigonométrico, se definen a partir de las relaciones entre catetos e hipotenusa del triángulo rectángulo, o en su defecto, como segmentos en un círculo unitario.

Con estos elementos, se pueden obtener las medidas del seno, coseno, tangente, cotangente para muchos ángulos. Si se toman los ángulos en radianes, $\text{sen}(0°) = 0$, $\cos(0°) = 1$, $\text{sen}(90°) = 1$, $\tan(45°) = 1$, etcétera; incluso podríamos deducir algunas de las propiedades de las funciones trigonométricas, es decir:

- $\text{sen}(x) = -\text{sen}(-x)$
- $\cos(x) = \cos(-x)$
- $\text{sen}(x + 2\pi) = \text{sen}(x)$
- $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$
- $\text{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$

Se ha considerado al círculo unitario para definir a las funciones seno y coseno, de manera que usando esa información se sabe que el punto sobre el círculo unitario tiene coordenadas $(\text{sen}x, \cos x)$ cuando x representa al ángulo de giro, dado que la hipotenusa del triángulo

mide uno. Sin embargo, dichas coordenadas han sido dadas en razón de nuestra definición de seno y coseno trigonométrico, es decir, han sido funciones definidas sobre giros, por lo tanto se evalúan en grados o en radianes. Ya que en los cursos de precálculo y de cálculo diferencial e integral se trabaja con funciones reales de variable real, no se pueden usar las definiciones trigonométricas que se han descrito anteriormente, hasta que no estén propiamente definidas sobre números reales.

La cuestión de interés radica en establecer un mecanismo que permita pasar del giro a su medida en grados o en radianes y de ahí a los números reales, pues de otro modo, no podríamos realizar operaciones como,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}=1$$

Pues la x del denominador estaría dada en grados, mientras que la función trigonométrica estaría determinada por un segmento sobre el círculo unitario y el resultado tendría que ser un número real sin dimensiones físicas. Para salvar este asunto, se requiere establecer la forma de conversión entre grados, radianes y reales.

Como se vio anteriormente, se ha establecido una equivalencia entre grados y radianes muy adecuada, tal que $360° = 2\pi$ radianes; ahora sólo falta elegir si en la función trigonométrica tomaremos el valor numérico del ángulo en grados o en radianes.

Supongamos que tomamos la convención de que la función seno se define como se indica a continuación. El ángulo $\angle$CAB (figura 7.19) lo medimos en radianes, es decir, su medida sea de x radianes, entonces (y aquí es donde está la convención) tomamos a la función seno definida como sen: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que a cada x real, le asigna el número real, sen(x).

$$\operatorname{sen}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \operatorname{sen}(x)$$

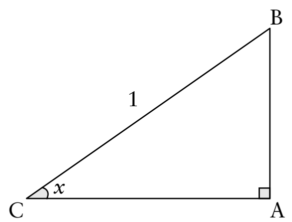


Figura 7.19 Triángulo rectángulo ABC.

Esto es, la medida del ángulo $\angle$CAB en radianes es x radianes, luego se toma al número real x y se asocia al número real sen(x). De este modo se evita el tratar con medidas físicas y se trata con números reales. Una pregunta que no se abordará en este libro, pero que salta a

la vista es la siguiente: ¿por qué no tomar el número de grados en vez del de radianes? La respuesta tiene que ver con el cálculo de las derivadas y el hecho de que al tomar radianes tenemos $\dfrac{d\operatorname{sen}(x)}{dx} = \cos(x)$, mientras que si tomamos grados, tendríamos $\dfrac{d\operatorname{sen}(x)}{dx} = k\cos(x)$ y de este modo las derivadas sucesivas tendrían factores de la forma k^n.

Una de las bondades de las calculadoras con capacidad gráfica, es que permiten analizar información visual como de la que ahora se está hablando, incluso en aquellos casos en los que el tratamiento analítico presupondría un manejo adicional de otros conceptos. Por ejemplo, grafiquemos a la función sen(x) de dos maneras distintas, una tomando a x medida en grados y la otra medida en radianes. Elijamos la siguiente ventana de visualización en GeoGebra (figura 7.20).

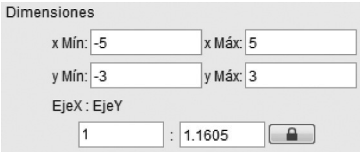
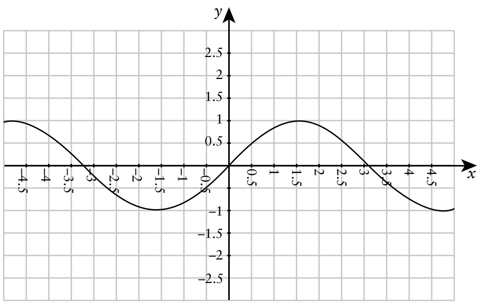
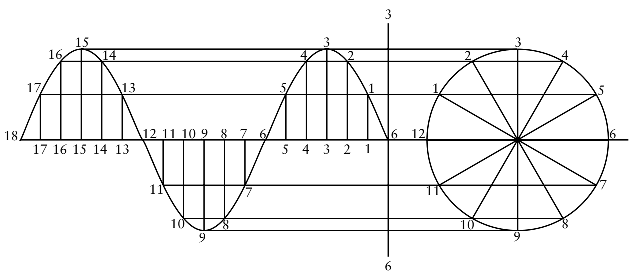


Figura 7.20 Ventana de visualización en GeoGebra.

Introduce, en la línea de edición, la función $f(x) = \operatorname{sen}(x)$. La gráfica que obtendrás es la que se muestra a continuación:



La curva representativa de la función seno es la misma que propusiera en Alemania Albrecht Dürer, en 1525.



De este modo, tendremos que la función seno ha sido definida sobre la recta real de manera que su dominio constará de todos los números reales y su imagen está reducida a un intervalo cerrado, ¿identificas cuál es?

Aumenta tu ventana de visualización en GeoGebra y con la herramienta “Punto en Objeto” coloca un punto sobre la gráfica y muévelo, explorando toda la gráfica. Observa cómo varía la coordenada (x, y). ¿Cuál es el valor máximo y mínimo que toma y ¿qué valores de x toma la coordenada en esos máximos/mínimos locales?

En la figura 7.21 se muestra la recta de las funciones constantes $y = 1$ y $y = -1$, junto con la gráfica de la función seno.

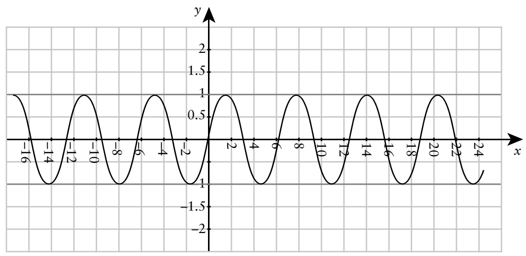


Figura 7.21 Representación gráfica de $y = 1$ y $y = -1$ y de la función seno.

La imagen de la función, como puede observarse, se reduce al intervalo cerrado $[-1, 1]$. Es posible observar también que crece y decrece periódicamente, es decir, alcanza sus máximos a la misma altura y lo mismo ocurre con sus mínimos. Como la función seno cumple con las siguientes propiedades se dice que es una función impar y periódica:

- Imparidad: $\operatorname{sen}(x) = -\operatorname{sen}(-x)$
- Periodicidad: $\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen}(x)$

Puedes verificar estas afirmaciones en GeoGebra, graficando las funciones $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, $g(x) = -\operatorname{sen}(x)$, $h(x) = \operatorname{sen}(x + 2\pi)$. Si sólo observas una gráfica es porque tales afirmaciones son ciertas y las gráficas están una sobre otra.

De la misma manera que la función seno se ha definido sobre la recta real, la función coseno tiene por dominio a los números reales y su imagen se encuentra contenida en el intervalo cerrado $[-1, 1]$, es decir, $-1 \leq \cos x \leq 1$, la gráfica correspondiente se muestra en la figura 7.22.

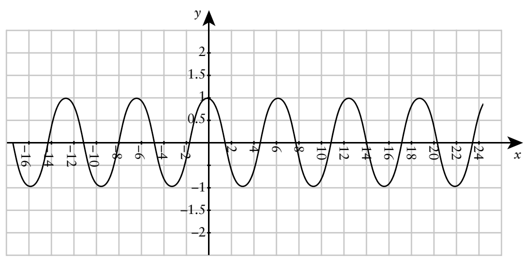


Figura 7.22 Representación gráfica de la función coseno.

Es posible observar a partir de la figura 7.22, que la función coseno crece y decrece periódicamente, alcanzando sus máximos a la misma altura y lo mismo ocurre con sus mínimos, en 1 y −1 respectivamente. Como la función coseno cumple con las siguientes propiedades, se dice que es una función par y periódica:

- Paridad: $\cos(x) = \cos(-x)$
- Periodicidad: $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$

Como en el caso de la función seno, puedes verificar estas afirmaciones graficando en GeoGebra las funciones $f(x) = \cos(x)$, $g(x) = \cos(-x)$, $h(x) = \cos(x + 2\pi)$.

Actividad 7.3

1. Construye las curvas representativas de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = \text{sen}(x)$

   b) $g(x) = \text{sen}(x + \pi)$

   c) $h(x) = \text{sen}(x + 2\pi)$

   d) $j(x) = \text{sen}(x - \pi)$

   e) $k(x) = \text{sen}(x - 2\pi)$

   f) $f(x) = \cos(x)$

   g) $g(x) = \cos(x + \pi)$

   h) $h(x) = \cos(x + 2\pi)$

   i) $j(x) = \cos(x - \pi)$

   j) $k(x) = \cos(x - 2\pi)$

   k) $f(x) = \tan(x)$

   l) $g(x) = \tan(x + \pi)$

   m) $h(x) = \tan(x + 2\pi)$

   n) $j(x) = \tan(x - \pi)$

   o) $k(x) = \tan(x - 2\pi)$

   ¿Cuáles de ellas son iguales?, ¿cuáles son diferentes?, y finalmente, ¿en qué difieren?

2. Pasemos ahora a estudiar las relaciones entre la función seno y la función coseno, ambas tienen un comportamiento bastante similar entre sí, de hecho, como podrás confirmar por las siguientes actividades la gráfica de una se obtiene trasladando a la de la otra. Explora para diferentes valores de x, las igualdades siguientes y verifica si se cumplen.

   a) $\text{sen}(x + \pi/2) = \cos(x)$

   b) $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$

   c) $\text{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$

3. Grafica las siguientes funciones:

a) $F(x) = \cos(x)$

b) $G(x) = \operatorname{sen}(x + \pi/2)$

c) $H(x) = \cos(x + 2\pi)$

d) $I(x) = \operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x)$

A continuación, describe verbalmente los aspectos que juzgues más relevantes.

4. Convierte de grados a radianes la medida de los siguientes ángulos:

a) 0°

b) 1°

c) 15°

d) 36°

e) 72°

f) 60°

g) 30°

h) 45°

i) 90°

j) 270°

k) 180°

l) 360°

m) 750°

n) 9°

o) 60°

p) 36°

q) 720°

5. Convierte de radianes a grados las medidas de los siguientes ángulos:

a) $\pi/2$ radianes

b) $\pi/4$ radianes

c) $\pi/8$ radianes

d) $\pi/3$ radianes

e) $2\pi/3$ radianes

f) $8\pi/3$ radianes

g) $\pi/45$ radianes

h) 2π radianes

i) 3π radianes

j) 3.5π radianes

k) 4π radianes

l) 16π radianes

m) $5\pi/12$ radianes

6. En el sistema coordenado iniciado en el eje x, dibuja el ángulo cuya medida se da a continuación:

a) 45°

b) π rad

c) 90°

d) $\pi/3$ rad

e) $11\pi/2$ rad

f) 540°

7. Con auxilio de tu calculadora, encuentra los valores de las siguientes expresiones trigonométricas:

a) sen $(\pi/2 \text{ rad})$

b) $\text{sen}(36°)$

c) $\cos(90°)$

d) $\cos(\pi/2)$

e) $\tan(45°)$

f) $\text{sen}(2\pi + \pi/2 \text{ rad})$

g) $\text{sen}^2(\pi/2 \text{ rad}) + \cos^2(\pi/2 \text{ rad})$

h) $\text{sen}^2(\pi/4 \text{ rad}) + \cos^2(\pi/4 \text{ rad})$

i) $\text{sen}^2(\pi/2 \text{ rad}) + \cos^2(\pi/2 \text{ rad})$

8. Encuentra el valor del ángulo en radianes si las el valor del seno, coseno o tangente es conocido:

a) sen $\alpha = 1, 0 < \alpha < 2\pi$

b) $\cos \alpha = 3/5, 0 < \alpha < 2\pi$

9. Grafica las funciones *f* y *g*, y comprueba las identidades trigonométricas usuales.

a) $\cos(\pi/2 - x) = \text{sen}(x)$

b) $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

c) $\text{sen}(\pi - x) = \text{sen} x$

d) $(\text{sen } x + \cos x)^2 = 1 + \text{sen}(2x)$

10. Si utilizamos la lectura de gráficas para determinar el sentido de variación de las funciones anteriores, como vimos en el capítulo 1, tendremos que sen(x) crece entre $-\pi/2$ y $\pi/2$, decrece desde $\pi/2$ y $(3/2)\pi$, y continua periódicamente con un periodo 2π. Equivalentemente, la función coseno decrece del 0 a π, y crece de π a 2π, de manera que podría completar sus tablas de variación. Completa las tablas de variación siguientes:

a) Función seno $y = \text{sen}(x)$

Entre $-\pi/2$ y 0	Entre 0 y $\pi/2$	Entre $\pi/2$ y π	Entre π y $3\pi/2$	Entre $3\pi/2$ y 2π

b) Función coseno $y = \cos(x)$

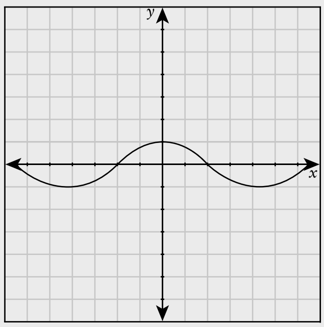
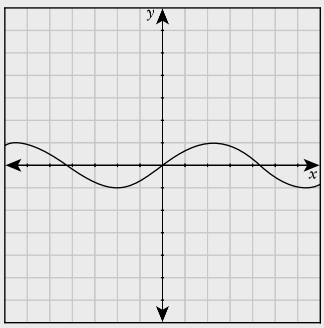
Entre $-\pi/2$ y 0	Entre 0 y $\pi/2$	Entre $\pi/2$ y π	Entre π y $3\pi/2$	Entre $3\pi/2$ y 2π

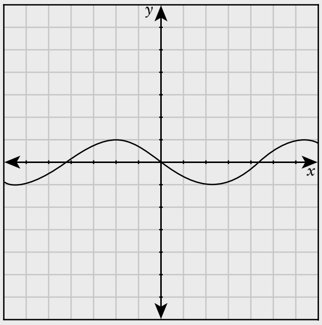
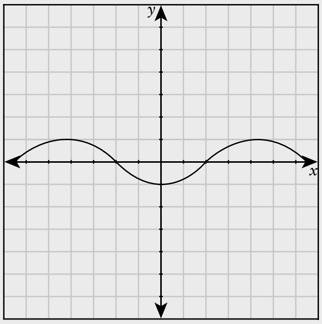
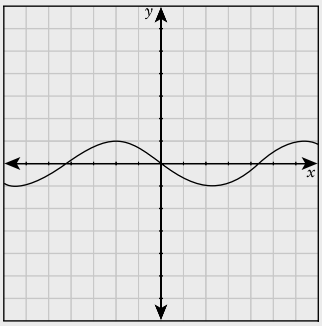
11. Utilizando los acercamientos que se presentaron en el capítulo 4, identifica cómo es la gráfica de las siguientes funciones. Una nota de terminología, a las funciones de la forma $f(x) = A\text{sen}(Bx + C) + D$ se les nombra funciones sinusoidales.

    $A\text{sen}(Bx + C) + D$, para diferentes valores de A, B, C y D.

    $A\cos(Bx + C) + D$, para diferentes valores de A, B, C y D.

12. Relaciona las gráficas de la izquierda con las fórmulas de la derecha.

	$y = \text{sen}x$
	$y = \cos x$

	$y = -\cos x$
	$y = \operatorname{sen}(x + \pi)$
	$y = -\cos x$

13. Construye por el método de las operaciones la gráfica de la función tangente, la cual se define como el cociente del seno entre el coseno. Determina su dominio de definición y su periodo: $\tan(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$.

14. Construye con el método de las operaciones las gráficas de las funciones secante, cosecante y cotangente.

7.4.1.3 Funciones trigonométricas inversas

Como se ha visto, las funciones trigonométricas se definen por un ángulo o un arco x en un círculo unitario. Así, las funciones trigonométricas inversas definen al arco x como una función de sen(x), cos(x), o tan(x).

Consideremos un triángulo rectángulo con hipotenusa 1. Si x denota a la longitud del lado opuesto al ángulo sobre el origen del triángulo rectángulo, arcsen(x) es la longitud del arco como se muestra en la figura 7.23.

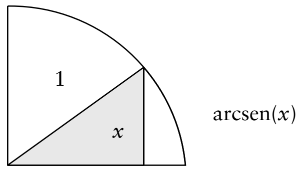


Figura 7.23 Representación gráfica del arcsen(x).

En forma similar, si x representa el cateto adyacente al ángulo A, tendremos que arccos(x) está dado por la longitud del arco sobre el círculo unitario que determina el valor de x (figura 7.24).

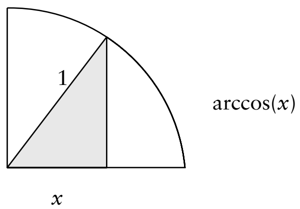


Figura 7.24 Representación gráfica del arccos(x).

Finalmente, el arctan(x) se define como la medida del arco sobre el círculo unitario cuando la x mide el lado opuesto, tangente al círculo (figura 7.25).

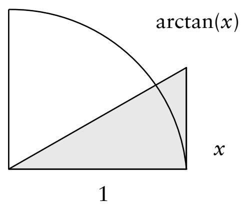


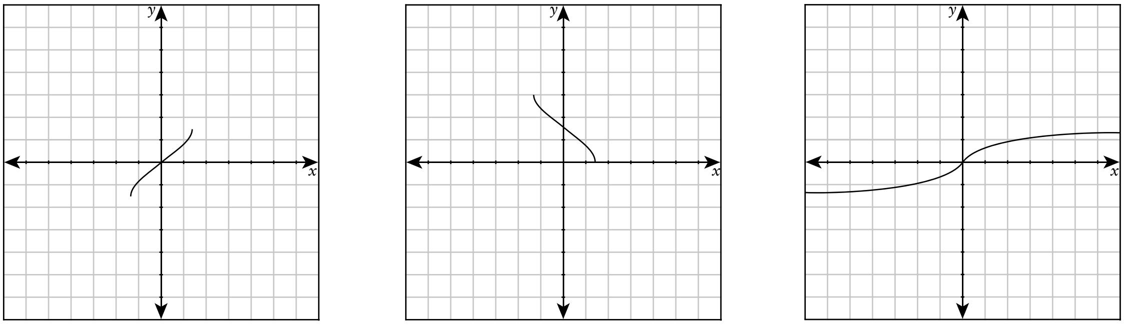
Figura 7.25 Representación gráfica del arctan(x).

A causa de la periodicidad de las funciones trigonométricas, las funciones trigonométricas inversas tendrían que ser multivaluadas, de modo que sólo se tomará la llamada rama

principal a efecto de conservar la definición de función como una regla que asocia a un elemento del dominio, un único elemento del contradominio. De este modo, las funciones trigonométricas inversas toman los dominios siguientes:

- $y = \text{arcsen}(x) \Leftrightarrow x = \text{sen}(y)$ para $-1 \leq x \leq 1$, $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$.
- $y = \arccos(x) \Leftrightarrow x = \cos(y)$ para $-1 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq \pi$.
- $y = \arctan(x) \Leftrightarrow x = \tan(y)$ para $-\infty < x < \infty$, $-\pi/2 < y < \pi/2$.

Las gráficas de las funciones trigonométricas inversas se muestran en la figura 7.26.



Gráfica de $y = \text{arcsen}(x)$ Gráfica de $y = \arccos(x)$ Gráfica de $y = \arctan(x)$

Figura 7.26 Representación gráfica de las funciones trigonométricas inversas.

7.4.2 Funciones logarítmica y exponencial

Las funciones exponenciales definidas en $\mathbb{R}$, son expresiones de la forma $y = a^x$, cuando $a > 0$. De este modo, las funciones exponenciales están definidas para todos los números reales y su imagen está en los reales positivos. Particularmente la función $y = 2^x$, va asociando a cada número x, el resultado de elevar 2 a la potencia x. Observa la figura 7.27.

Hoja de Cálculo

	A	B	C
1	0	=2^(A1)	
2	1		
3	2		
4	3		
5	4		
6	5		

Hoja de Cálculo

	A	B	C
1	0	1	
2	1	2	
3	2	4	
4	3	8	
5	4	16	
6	5	32	
7			

Figura 7.27 Tabla de valores de cómo se comporta la función para enteros entre 0 y 5.

Con estos datos en GeoGebra, y creando una lista de puntos, como las que se muestran en la figura 7.28, se tiene que:

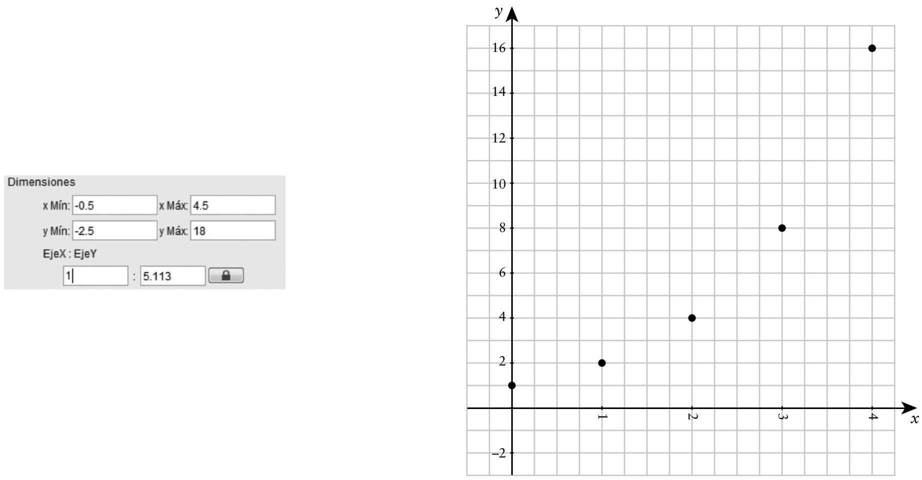


Figura 7.28 Lista de puntos y gráfica de la función.

Estos cálculos se pueden realizar directamente a causa de que la tabla de valores estuvo construida para x enteros. Es decir, $2^0 = 1$, $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, etcétera. ¿A qué será igual $2^{\sqrt{2}}$, 2^π o $2^{1/3}$? Si se hacen esos cálculos en la calculadora tendremos por resultado aproximaciones decimales de los valores verdaderos, es decir, por ejemplo 2^π es aproximadamente 8.824977827, de modo que no podremos saber por estos métodos el valor exacto. En tal caso, ¿cómo construir su gráfica? Puedes verla en la figura 7.29.

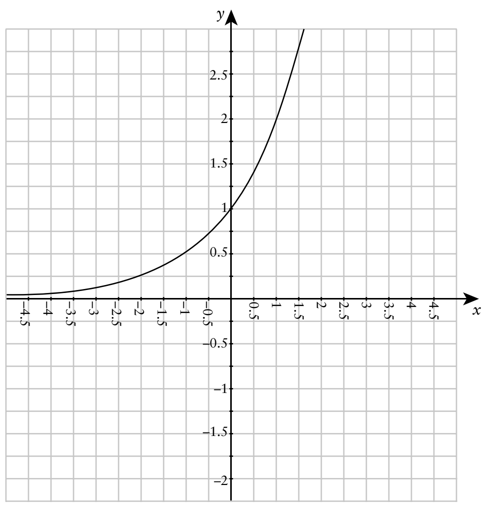


Figura 7.29 Gráfica de la función $y = 2^x$, en la pantalla de visualización $[-5, 5]$ por $[-3, 3]$.

Actividad 7.4

1. Grafica las siguientes funciones:

   a) $y = 2^x$, en la ventana $[-5, 5]$ por $[-3, 64]$

   b) $y = 2^x$, en la ventana $[-5, 5]$ por $[-3, 8]$

   c) $y = 2^x$, en la ventana $[-5, 5]$ por $[-3, 16]$

   d) $y = 2^x$, en la ventana $[-5, 5]$ por $[-3, 32]$

   e) $y = 2^x$, en la ventana $[-5, 5]$ por $[-3, 64]$

   f) $y = 2^x$, en la ventana $[-5, 5]$ por $[-3, 128]$

2. Bosqueja la gráfica de las funciones en la misma ventana de visualización.

   a) $y = 2^x$

   b) $y = 3^x$

   c) $y = 4^x$

   d) $y = 5^x$

   e) $y = 6^x$

3. A partir del problema anterior, qué valores de x cumplen con la relación $2^x > 3^x > 5^x$.

4. Equivalentemente, cuándo se cumple que $2^x < 3^x < 5^x$.

5. Cuándo se cumple que $2^x = 3^x = 5^x$.

6. Para qué valores se cumple que $2^x = 4^x$.

7. Construye las gráficas de $y = 0.5^x$, 0.1^x, $(1/3)^x$, 2^{-x}, 3^{-x}, 5^{-x}.

8. Utilizando deslizadores en GeoGebra, grafica la familia de funciones $y = A^x$ para valores de A enteros desde $A = 1$ hasta $A = 10$.

9. Utilizando deslizadores en GeoGebra, grafica la familia de funciones $y = A^{-x}$ para valores de A enteros desde $A = 1$ hasta $A = 10$.

10. Utilizando deslizadores en GeoGebra, grafica la familia de funciones $y = (1/\mathrm{A})^x$ para valores de A enteros desde $A = 1$, hasta $A = 10$.

11. Qué diferencias y similitudes encuentras entre las respuestas de las tres preguntas anteriores.

12. Completa la tabla de valores para de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ para n de 1 hasta 100.
13. Completa la tabla de valores para la suma $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{2\times 3\times 4}+\ldots+\frac{1}{2\times\ldots\times n}$ para valores de n que vayan de 1 hasta 100.
14. Compara los resultados de las dos tablas de valores de los ejercicios 12 y 13.
15. Euler definió en el siglo XVIII al número e, en honor a su nombre, como el número que es el límite de ambas sucesiones tratadas en los ejercicios 12 y 13. Es decir:

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \text{ o bien, como } e=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}.$$

16. Construye la gráfica de $y=e^x$.
17. Grafica con un menú de gráficas simultaneas, a las curvas $y=2^x$, $y=3^x$, $y=e^x$.

7.4.2.1 Didáctica de lo exponencial

La siguiente actividad, titulada "Un estudio de expresiones exponenciales" didáctica realizada por Javier Lezama y reportada en (Lezama, 1999), muestra algunas características que se emplean para fortalecer el conocimiento en los estudiantes.

Es muy probable que al hojear un libro introductorio de álgebra elemental encontremos tablas como las que a continuación se muestran y que corresponden a un libro tomado al azar:

Exponentes enteros y sus leyes	Resumen
Definición de a^p p es un entero y a es un número real	Leyes de los exponentes n y m son enteros, a y b son números reales
1. Si p es un entero positivo, $a^p=a\cdot a\ldots a$ p factores a Ejemplo: $3^5=3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3$ 2. Si $p=0$, donde $a^p=1$ $a\neq 0$ Ejemplo: $3^0=1$ 3. Si p es un entero negativo, $a^p=\frac{1}{a^{-p}}$ $a\neq 0$ Ejemplo: $3^{-4}=\frac{1}{3^{-(-4)}}=\frac{1}{3^4}$	1. $a^m a^n=a^{m+n}$ 2. $(a^n)^m=a^{mn}$ 3. $(ab)^m=a^m b^m$ 4. $\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a^m}{b^m}$ 5. $\frac{a^m}{b^m}=a^{m-n}=\frac{1}{a^{n-m}}$

Además se pueden encontrar las siguientes definiciones:

Definición de raíz enésima
Para un número natural n. a es la raíz enésima de b, si: $a^2 = b$

Número de raíces enésimas reales de un número real b		
	n par	n non
b positivo	dos raíces enésimas reales	una raíz real
b negativo	ninguna raíz real	una raíz real

Para todas las expresiones $b^{1/n}$

	n par	n impar
b positivo	$b^{1/n}$ es la raíz enésima positiva de b	$b^{1/n}$ es la raíz enésima real de b
b negativo	$b^{1/n}$ no es un número real	$b^{1/n}$ es la raíz enésima real de b

Además se agrega: $0^{1/n} = 0$ para todos los números naturales.

Notación para la raíz enésima
Para un número n, mayor que 1, y cualquier número real b:
$\sqrt[n]{b} = b^{1/n}$

La presentación de tablas como las mostradas arriba, constituyen un recurso eficaz para lograr que los estudiantes puedan localizar las propiedades de los exponentes y las puedan emplear de manera correcta. Una consulta rápida puede lograr en el estudiante que adquiera información la cual redundará en una aplicación correcta de las reglas de los exponentes cuando se están manejando procedimientos algebraicos que manejan expresiones con exponentes.

La eficacia se logra en el contexto de la aplicación correcta de las propiedades de los exponentes, pero cuando el estudiante se esfuerza en dar significado a tales propiedades fácilmente incurre en errores y contradicciones que le impiden organizar dichas propiedades en contextos que estén más allá de lo operativo.

Este hecho lo muestran investigaciones realizadas en el contexto del estudio de la función exponencial (Aguilar *et al.*, 1997).

Nuestro interés era conocer las concepciones que de esta función se tienen en el medio escolar, para lo cual hacemos una exploración preliminar a través de un cuestionario con el siguiente propósito: "Tener un primer acercamiento a las concepciones que los estudiantes tienen sobre la función 2^x".

Las respuestas más importantes dadas por los estudiantes las hemos agrupado de la siguiente manera:

- 2^x es una operación solo para los enteros, ya que interpretan 2^x como multiplicar 2 por sí mismo "x veces".
- Cuando $x < 0$ no hay una interpretación uniforme para 2^x como lo muestran las siguientes respuestas: $2^{-3} = 0.002$, $2^{-3} = (-2)(-2)(-2) = -8$, $2^{-3} = 1/2^3$.
- Si x no es entero, 2^x es solamente una notación ($2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}; 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$, etc.), 2^π es un numero que no se puede calcular ya que carecen de un algoritmo para hacerlo y sólo se pueden obtener una aproximación con el auxilio de la calculadora.

Ante esta realidad proponemos el siguiente desarrollo para llevar a cabo actividades que le permitirán al estudiante interactuar con la noción de exponente, en un contexto más amplio en el que integrará la noción de función, su representación gráfica así como algunas nociones de geometría.

La secuencia

Objetivos:

- Proporcionar un proceso geométrico de construcción de puntos de la gráfica de la función 2^x, así como identificar y analizar regularidades propias de la función.
- Confrontar la concepción espontánea de que 2^x es evaluable sólo cuando x es entero.

Podemos esperar que los estudiantes: evaluarán a 2^x, cuando x no es entero, asociándola con magnitudes.

La actividad se compone de dos etapas.

Nota: se propone el desarrollo de las actividades en cada una de las etapas se haga en equipos de a lo más 4 estudiantes.

Primera etapa

Proporciona los conocimientos geométricos para obtener raíces y productos. Esta etapa constituye una fase de acción preparatoria.

Estudio de la función 2^x

Introducción

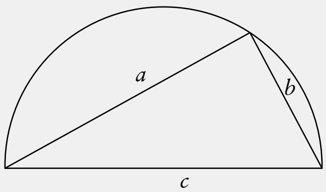
A través de la siguiente secuencia de actividades se pretende familiarizar a los estudiantes con algunas propiedades y características de la función exponencial 2^x. Para lo cual se recurrirá a construcciones geométricas mediante regla y compás así como a la observación de regularidades.

El desarrollo de las actividades deberá ir acompañado de su respectivo reporte, en esta ocasión prescindiremos del uso de la calculadora a fin de restringirnos al uso de la regla y el compás.

Comenzamos

Actividad 1

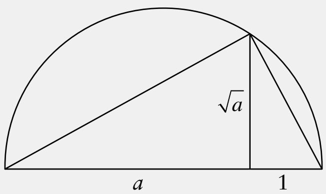
Recuerda que si se inscribe un triángulo en una semicircunferencia y uno de sus lados coincide con el diámetro, como se muestra a continuación,



se tiene que el triángulo es rectángulo. Elabora argumentos para convencerte de que dicho triángulo es rectángulo.

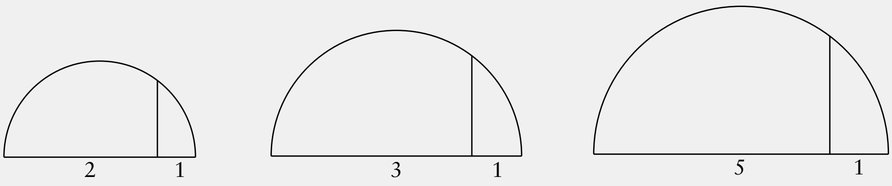
Actividad 2

Al trazar la altura del triángulo correspondiente a la hipotenusa como se muestra en la siguiente figura,



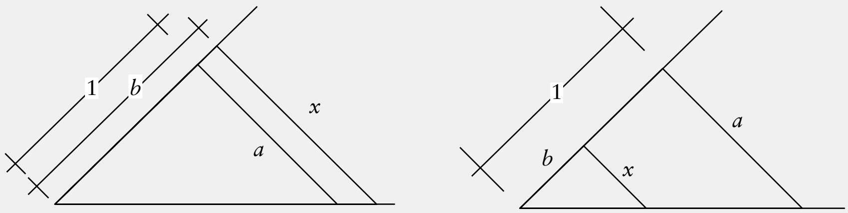
la altura divide a la hipotenusa en dos partes. Si suponemos que una de ellas mide la unidad y la otra una cantidad a, se obtiene que la altura mide $\sqrt{a}$. Convéncete de la veracidad de esta afirmación

Actividad 3.
Utilizando el resultado anterior, construye para cada caso un segmento de magnitud $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ y $\sqrt{5}$.



Asimismo, recuerda que el producto de dos magnitudes se puede obtener mediante un criterio geométrico, basado en semejanza de triángulos, el cual se desarrolla en la siguiente actividad:

Actividad 4
Dados dos números $a, b > 0$; su producto se puede obtener geométricamente como se muestra en las figuras, siendo a y x segmentos paralelos. Verifica que el producto de a y b es el segmento x en cada caso ($b > 1$, $b < 1$).



Actividad 5
Empleando el procedimiento geométrico de semejanza descrito anteriormente, construye para cada caso un segmento de magnitud $(\sqrt{2})(\sqrt{3})$, $(\sqrt{3})(\sqrt{5})$.

En esta etapa identificamos los siguientes elementos que son relevantes para su desarrollo:

- Las actividades propician el que los estudiantes entren en acción, dibujando las figuras correspondientes.

- Puede haber dificultades con la noción de semicircunferencia y el hecho de inscribir en ella un triángulo.
- El acto de validar que el triángulo es rectángulo puede constituirse en dificultad para algunos estudiantes.
- Pueden algunos estudiantes analizar sólo unos casos particulares y formular generalizaciones sin llegar a una justificación.
- En la construcción de segmentos de longitud $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, es posible que empleen distintos segmentos como unidad.
- Puede no recordarse la noción de semejanza y el hecho de que los lados homólogos son proporcionales.
- Es posible que no puedan hacer uso de la semejanza para obtener los productos: $(\sqrt{2}\sqrt{3})$ $(\sqrt{5}\ \sqrt{3})$.
- Algunos estudiantes se darán cuenta que el método estudiado no sirve para obtener raíces cúbicas, quintas, etcétera.
- Como los resultados y técnicas desarrolladas en esta etapa son fundamentales para el desarrollo de la siguiente etapa, es particularmente importante la discusión en grupo de los trabajos de los equipo. Es conveniente que en esta actividad de institucionalización se resuelvan todas las dudas.

Segunda etapa

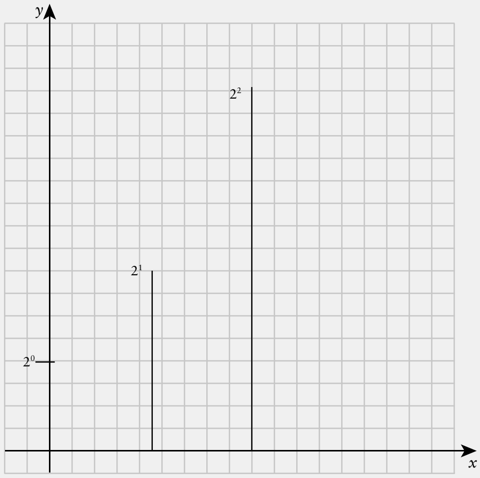
En donde se aplican los conocimientos adquiridos en la etapa anterior para construir seis puntos de la gráfica de la función 2^x en el intervalo [0, 2].

Construcción geométrica

Actividad 6

En la siguiente figura se han trazado los segmentos de magnitudes 2^0, 2^1 y 2^2; que nos sirven para localizar los puntos de coordenadas $(0, 2^0)$, $(1, 2^1)$ y $(2, 2^2)$.

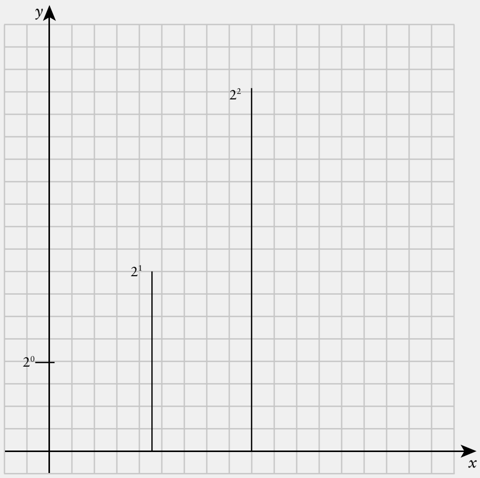
El problema a resolver consiste en localizar los puntos $(½, 2^{½})$, $(¼, 2^{¼})$, $(¾, 2^{¾})$ y $(5/4, 2^{5/4})$. Para esto, deberás localizar los segmentos de magnitudes $2^{¼}$, $2^{½}$, $2^{¾}$ y $2^{5/4}$, empleando únicamente procedimientos geométricos. Recuerda que $2^{3/4}$ se puede expresar como $2^{1/4}\,2^{1/2}$.



Actividad 7

En esa misma figura, ¿cómo localizarías el punto (1/8, $2^{1/8}$)? Explica.

¿Es posible obtener más puntos siguiendo el procedimiento discutido anteriormente? Explica ampliamente.



En esta etapa identificamos los siguientes elementos que son relevantes para su desarrollo.

- Puede haber dificultad para identificar la unidad.
- La construcción de los segmentos solicitado puede hacerse sobre los ejes cartesianos (es lo recomendable), o aparte, pero se corre el riesgo de que modifiquen la unidad en cada trazo.Tiene especial dificultad la obtención de los segmentos $2^{3/4}$ y $2^{5/4}$.
- Puede ser que algunos estudiantes intenten localizar los segmentos al tanteo.

- Algunos estudiantes harán un trazo continuo.
- Algunos estudiantes contestarán a las preguntas con un sí o un no, sin justificación.
- Algunos estudiantes harán explícito el que solamente se pueden obtener segmentos correspondientes a números de la forma $\frac{p}{2^q}$.

Es importante por parte del profesor, provocar y fomentar una discusión entre los estudiantes con el fin de clarifiquen los aspectos matemáticos trabajados en la actividad, así como tomar nota de los aspectos nuevos que abra la discusión de los estudiante.

Es muy importante que los profesores hagan la actividad y la discutan entre ellos identificando las dificultades que crean presentarían sus estudiantes al efectuarla.

Las lecturas recomendadas en la bibliografía les permitirán conocer en el contexto de una investigación cómo vivieron algunos estudiantes la secuencia y los resultados obtenidos.

7.4.2.2 La función logaritmo como la inversa de la función exponencial

Los logaritmos tienen una evolución histórica muy interesante, han estado presentes en múltiples formas a lo largo de la evolución humana. A veces, se les encuentra como una forma de establecer correspondencias entre progresiones aritméticas y geométricas.

La definición actual de logaritmo de números positivos suele provenir de tres tipos de acercamientos didácticos. Por un parte, es la extensión de las propiedades entre las progresiones aritméticas y geométricas que fueron desarrolladas mucho tiempo atrás entre los antiguos calculadores. En esta aproximación, la relación entre las progresión aritmética: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6,... y la progresión geométrica 1, 10, 100, 1 000, 10 000, 100 000, 1 000 000... se establece al corresponder una con la otra a través de la sucesión de potencias: 10^0, 10^1, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6, ... De este modo, tenemos que $\log_{10}100 = 2$ y $\log_{10}[100 \times 1\,000] = 2 + 3$.

Por otra parte, suele presentarse a los logaritmos en el terreno analítico, ya sea como la integral de la hipérbola equilátera en la rama positiva o como la inversa de la función exponencial. Quizá la más socorrida sea dado por la integral siguiente:

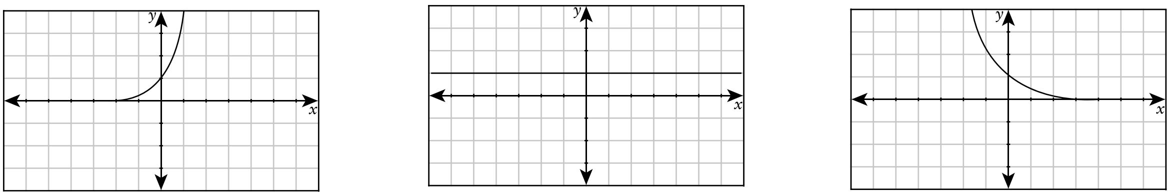
$$\log_e(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}, \quad x > 0.$$

Por último, una presentación menos usual, pero que conviene señalar es la estructuralista. Se dice que F es logarítmica si cumple con lo siguiente,

$$F(xy) = F(x) + F(y) \text{ para todos } x \text{ e } y \text{ reales no nulos.}$$

Estas tres presentaciones corresponden a épocas y circunstancias diferentes. La primera está fuertemente conectada con necesidades sociales de cómputo veloz y preciso. La segunda se orienta a desarrollar una teoría de funciones, entendida a la función como entidad capaz de modelar, representar matemáticamente a la naturaleza. Por último, la tercera, es propuesta al momento de concebir a la matemática como una gran estructura lógica deductiva.

En nuestro caso usaremos la idea de que la función logarítmica es la inversa de la función exponencial. Como se vio con anterioridad, la función exponencial $y = a^x$ con $a > 0$, produce gráficas genéricas como las que se muestran en la figura 7.30.



Gráfica de $y = a^x$, con $a > 1$ | Gráfica de $y = a^x$, con $a = 1$ | Gráfica de $y = a^x$, con $0 < a < 1$

Figura 7.30 Gráficas genéricas.

Como la función logaritmo es la función inversa de la función exponencial, esta estará definida para los casos en que $a > 0$, pero $a \neq 1$. ¿Por qué consideras que se excluye al 1?

Diremos que la función logaritmo de base a, $a > 0$, pero $a \neq 1$, es $y = \log_a x$, si y solamente si, $x = a^y$. Por lo tanto, su gráfica es:

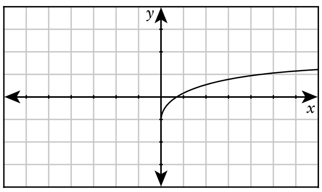


Figura 7.31 Gráfica de $y = \log_a x$, con $a > 1$

Actividad 7.5

1. Grafica las siguientes funciones:

   a) $f(x) = \log_2 x$

   b) $f(x) = \log_3 x$

   c) $f(x) = \log_4 x$

   d) $f(x) = \log_5 x$

   e) $f(x) = \log_{1/2} x$

   f) $f(x) = \log_{1/3} x$

   g) $f(x) = \log_{1/4} x$

2. Resuelve gráficamente las siguientes ecuaciones:

   a) $\log_2 x + \log_2(4 - x) = 0$

   b) $\log_{10} x + \log_{10}(3 - x) = 0$

   c) $e^x + e^{-x} = 3$

3. Determina el dominio y el rango de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = \log_3 (x - 4)$

   b) $f(x) = \log_4 (x - 2)$

   c) $f(x) = \log_3 (x + 4)$

   d) $f(x) = \log_4 (x + 2)$

4. Utilizando GeoGebra muestra que tomando $a > 0$ y $a \neq 1$, entonces,

   a) $\log_a 1 = 0$

   b) $\log_a a = 1$

   c) $a^{\log_a x} = x$ para todo x real positivo

   d) $\log_a a^x = x$ para todo número real x

5. Utilizando deslizadores en GeoGebra, elige valores de B diferentes y explora las siguientes identidades. Conviene que tomes y_1 como la función de la izquierda de la igualdad y la función y_2 como la función que se tiene a la derecha de la igualdad.

   a) $\log_a Bx = \log_a B + \log_a x$

   b) $\log_a B/x = \log_a B - \log_a x$

   c) $\log_a x^B = B \log_a x$

7.4.3 Funciones hiperbólicas

Así como se trabajó con funciones circulares, también es posible hablar de funciones hiperbólicas. Éstas como aquellas, provienen de buscar relaciones entre variables asociadas a curvas, particularmente con hipérbolas. Al igual que en las circulares, estas funciones están definidas sobre reales.

Foncenex en 1759 y Lambert en 1770 propusieron tratar con una hipérbola en vez de un círculo y con un área en vez de un ángulo. Para una x dada, sea P el punto sobre la hipérbola $u^2 - v^2 = 1$, tal que, el área sombreada es igual a $x/2$. De este modo, las coordenadas de dicho punto denotan los valores del seno hiperbólico y del coseno hiperbólico (figura 7.32).

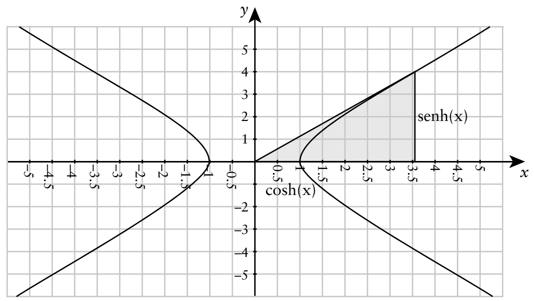


Figura 7.32 Representación gráfica del senh(x) y cosh(x) sobre la hipérbola $u^2 - v^2 = 1$.

Como práctica puedes desarrollar las siguientes actividades:

1. Prueba a partir de esta definición, que:

- $\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$
- $\operatorname{senh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

2. Verifica que:

   a) $\operatorname{senh}(x + y) = \operatorname{senh}(x)\cosh(y) + \cosh(x)\operatorname{senh}(y)$

   b) $\cosh(x + y) = \cosh(x)\cosh(y) + \operatorname{senh}(x)\operatorname{senh}(y)$

3. Las funciones inversas del seno hiperbólico y coseno hiperbólico son, entonces, las funciones áreas, mismas que están definidas como sigue:

   a) $y(x) = \operatorname{arcsen}(x) \Leftrightarrow x = \operatorname{senh}(y)$ para $-\infty < y < \infty$

   b) $y(x) = \operatorname{arcosh}(x) \Leftrightarrow x = \cosh(y)$ para $0 \leq x < \infty$, $1 \leq y < \infty$

   c) $\operatorname{arcsen}(x) = \ln[x + \sqrt{(x^2 + 1)}]$

   d) $\operatorname{arcosh}(x) = \ln[x + \sqrt{(x^2 - 1)}]$

Como vimos, las funciones hiperbólicas están definidas en una forma similar a las funciones trigonométricas, de manera que con las identidades anteriores, tendremos:

- $\operatorname{senh}(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$
- $\cosh(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$
- $\tanh(x)=\dfrac{\operatorname{senh}(x)}{\cosh(x)}=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$
- $\coth(x)=\dfrac{\cosh(x)}{\operatorname{senh}(x)}=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$
- $\operatorname{sech}(x)=\dfrac{1}{\cosh(x)}=\dfrac{2}{e^x+e^{-x}}$
- $\operatorname{csch}(x)=\dfrac{1}{\operatorname{senh}(x)}=\dfrac{2}{e^x-e^{-x}}$

Actividad 7.6

1. Determina el dominio de cada una de estas funciones.
2. Bosqueja la gráfica de cada una de las funciones hiperbólicas que definimos anteriormente, utiliza una ventana [–5, 5] por [–10, 10].
3. Establece una ventana en la que la función sen$h(x)$ no tenga ninguna parte de su gráfica incluida.
4. Construye la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{\operatorname{senh}(x+h)-\operatorname{senh}(x)}{h}$ para $h=0.1, 0.001$ y 0.001.
5. Grafica la función $g(x)$ = cos$h(x)$. ¿Qué relación encuentras entre esta gráfica y las que construiste en el problema anterior?
6. ¿Es la función sen$h(x)$ siempre positiva? ¿Por qué?
7. Resuelve la ecuación cos$h(x) = -1$.
8. Construye la gráfica de la función $h(x) = \operatorname{senh}^2(x) - \cosh^2(x)$
9. ¿Es la función $f(x)=\dfrac{3^x+3^{-x}-2}{2}$ negativa para todo $x \in \mathbb{R}$?
10. Explica sobre ventana de visualización que muestre a las gráficas del sen$h(x)$ y del cos$h(x)$, el por qué sen$h(x)$ + cos$h(x) = e^x$.

ANEXO 1

La pantalla inicial de GeoGebra se muestra en la figura A.1:

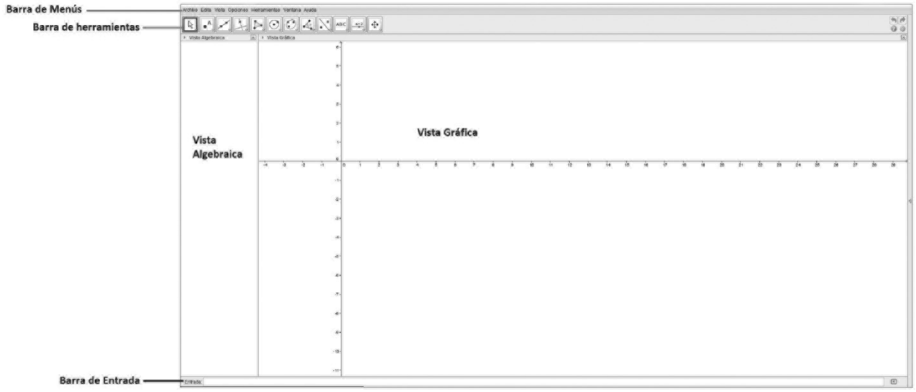


Figura A.1 Pantalla inicial de GeoGebra.

En la parte superior se encuentran la Barra de Menús y la Barra de Herramientas. Al pulsar cada Menú (figura A.2) y cada Herramienta (figura A.3) se tiene acceso a otras opciones, como las que se muestra a continuación:

Figura A.2 Otras opciones de GeoGebra.

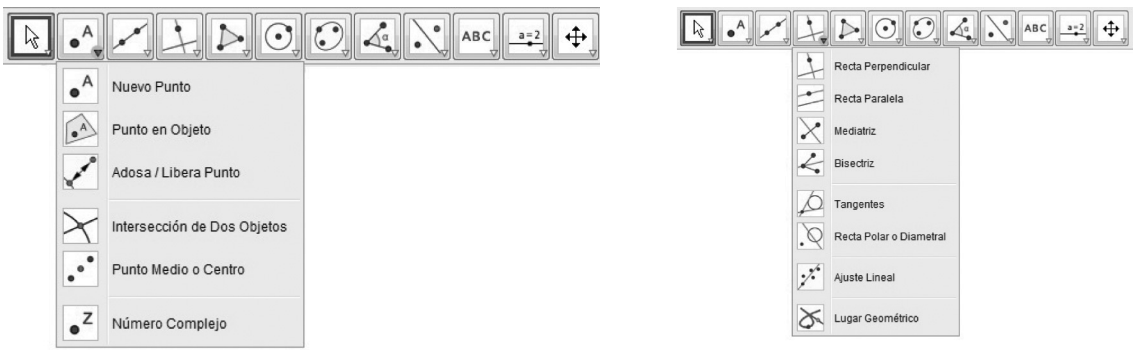


Figura A.3 Algunas herramientas de GeoGebra.

En la parte inferior se encuentra la Barra de Entrada (figura A.4), compuesta por la línea de edición donde, al posicionar el cursor, se activa un ícono que despliega letras griegas, operadores y símbolos matemáticos; y finalmente el botón de comandos donde puedes encontrar el formato de las instrucciones que se introducen en la línea de edición.

Figura A.4 Barra de entrada de GeoGebra.

A lo largo del libro se darán ejemplos de cómo introducir las instrucciones al programa, pero conviene que tengas en cuenta que:

- Una vez elegida una herramienta, ésta se construirá en la vista gráfica tantas veces como la toques. Es decir, una vez construida la herramienta elegida es necesario pulsar Esc para "soltar la herramienta". Por ejemplo, introduce en la línea de edición la función que, al pulsar Enter, aparecerá en la Vista algebraica como (figura A.5).

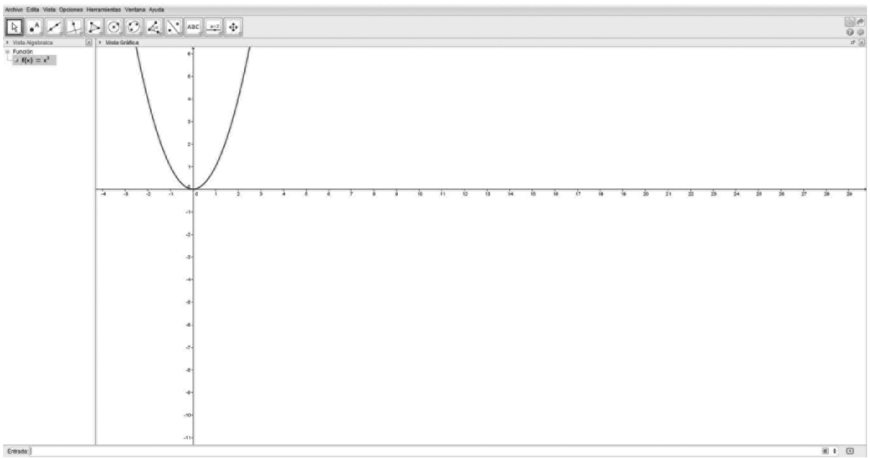


Figura A.5 Vista gráfica de GeoGebra.

- Pulsa la herramienta "Nuevo Punto" y elige la herramienta "Punto en Objeto". Coloca un punto sobre la gráfica y observa cómo se mantiene activa la herramienta , con lo que podrías seguir colocando puntos sobre la gráfica. Es necesario que pulses Esc o elijas la herramienta "Elige y Mueve" para que puedas mover el punto por la gráfica.

- Con la opción "Disposición" del Menú "Vista" (figura A.2) podrás modificar las "Preferencias" de muchos objetos y herramientas. En particular, en las "preferencias de la vista gráfica" podrás modificar tu ventana de visualización (figura A.6). El eje x se visualizara desde el valor de $xMín$ hasta el valor de $xMáx$, lo mismo para el eje y.

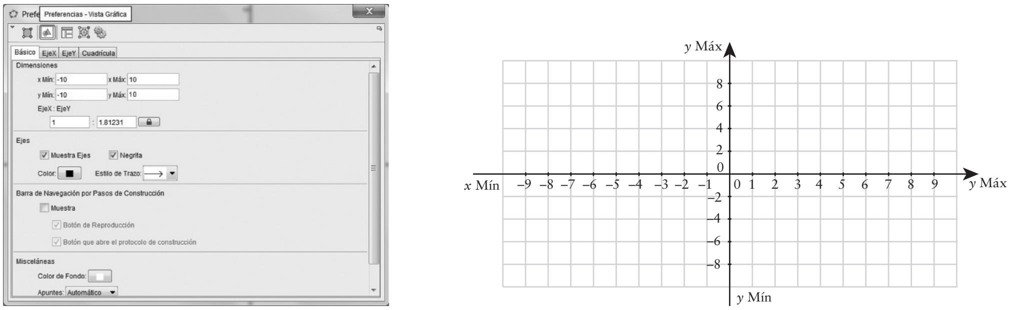


Figura A.6 Preferencias de vista gráfica de GeoGebra.

- Con la herramienta “Desplaza Vista Gráfica” puedes mover directamente toda la Vista gráfica y, estando activa la herramienta, posicionarte directamente en alguno de los ejes para cambiar sus valores.
- Tocando directamente el objeto, por ejemplo la gráfica, y dando *clic* con el botón derecho se tiene acceso a sus propiedades. Desde ahí se pueden cambiar, por ejemplo, su color o su grosor (figura A.7).

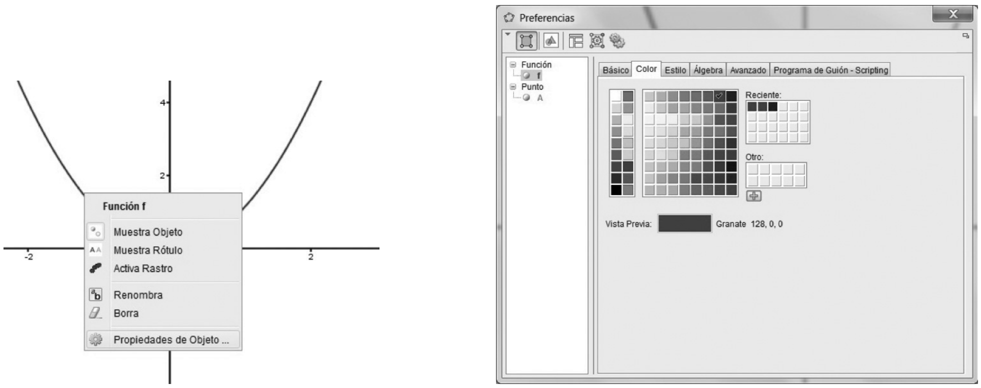
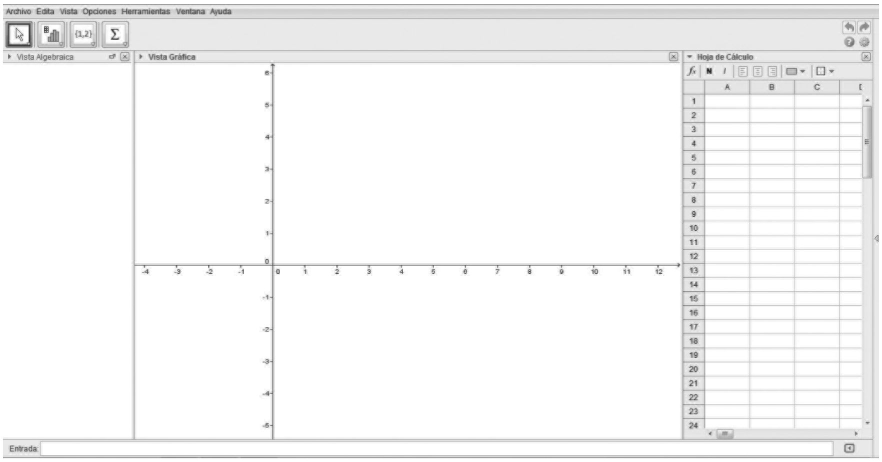
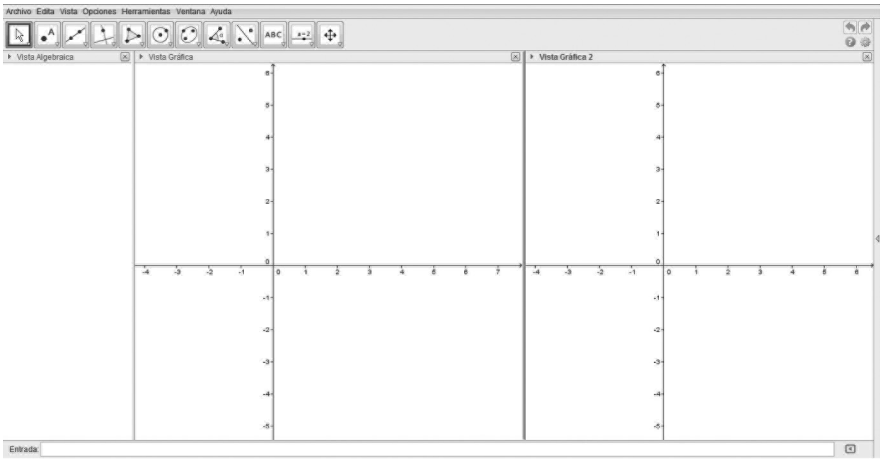


Figura A.7 Propiedades de vista gráfica de GeoGebra.

- En el Menú Vista están las opciones de “Hoja de cálculo”, “Vista gráfica 2” y “Cálculo simbólico”. Con las cuales tendrías los siguiente ambientes de trabajo (figura A.8), respectivamente:





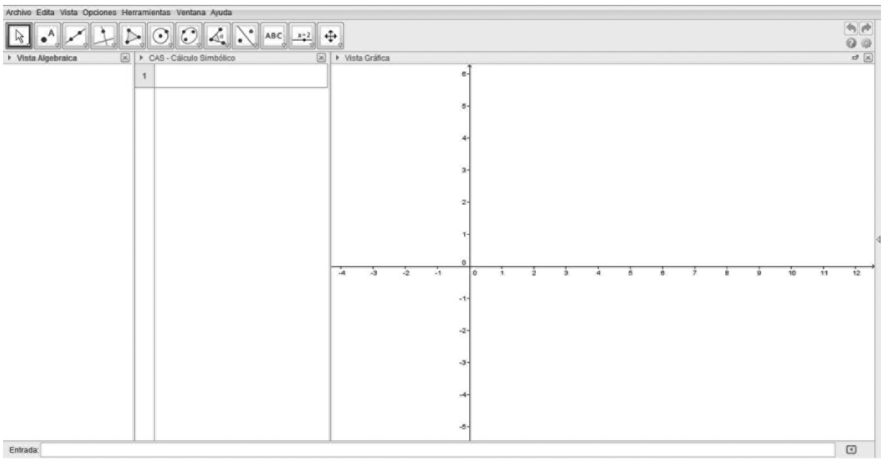


Figura A.8 Otros ambientes de trabajo de GeoGebra.

El primero será el más utilizado en este libro, dado que son los registros más comunes para el tratamiento escolar de la noción de función.

En virtud de que GeoGebra es un programa de acceso libre y código abierto, se ha constituido una comunidad de profesores y tecnólogos educativos que día a día publican tutoriales, diseños, nuevas herramientas y mejoras al programa, a través de sitios web o canales de video, fácilmente localizables en Internet. En el Menú "Ayuda" (figura A.9) hay ligas directas donde puedes encontrar más recursos con el fin de explorar aun más el programa.

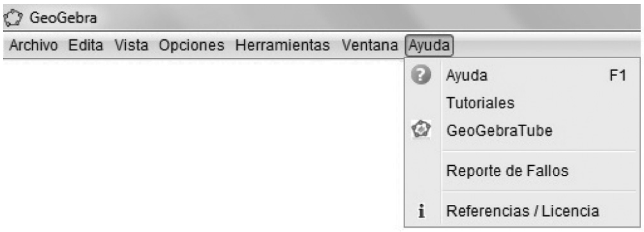


Figura A.9 Ventana de ayuda de GeoGebra.


-12 dB
USD
EUR
1.2855
121.4700
0.8483
1.2191
1.3069
(BPM) HEARTRATE